Struktursätze für Fastringe

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

Gerhard Betsch
aus Stuttgart

1963

7598

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549606_0073

Strukturätze für Fastringe

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard - Karls - Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

Gerhard Betsch
aus Stuttgart

1963

RIJKSUNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Tag der mündlichen Prüfung: 29. August 1963

Dekan: Prof. Dr. G. Möllenstedt

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Wielandt

2. Berichterstatter: Prof. Dr. P. Roquette

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 3

§ 1. Grundbegriffe 5

§ 2. Radikalähnliche Unterstrukturen
eines Fastrings 12

§ 3. Zerlegungssätze 22

§ 4. Beispiele 37

§ 5. Bireguläre Fastringe 41

Literatur 59

Lebenslauf 61

Einleitung.

Das Radikal eines Ringes N kann man als Durchschnitt der Annullatoren der irreduziblen N-Rechtsmoduln definieren. [JACOBSON 9; Seite 4, Definition 2] [1]. Dabei ist der Annullator $A(\Gamma)$ eines N-Rechtsmoduls Γ erklärt als Menge der $n \in N$ mit $\gamma n = o$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Der Annullator $A(\Gamma)$ ist ein Ideal.

In der Note [2] des Verfassers wurde diese Definition auf Fastringe N übertragen, indem man an die Stelle der irreduziblen N-Rechtsmoduln wesentlich minimale N-Gruppen setzte. [2; Definition 2.1 a]. Ist N ein Ring, so ist eine wesentlich minimale N-Gruppe nach [2; Satz 2.2] ein irreduzibler N-Rechtsmodul. Daher fällt das in [2; Definition 2.1 a] definierte Radikal J mit dem Jacobsonschen Radikal zusammen, sobald N ein Ring ist. Es gibt aber noch andere Typen "kleiner" N-Gruppen, die irreduzible N-Rechtsmoduln sind, falls N ein Ring ist. Die Radikaldefinition von JACOBSON [9] kann daher auf verschiedene Arten verallgemeinert werden. Dies wird im § 2 durchgeführt. Wir betrachten dort radikalähnliche Unterstrukturen von N, die im Falle eines Ringes mit dem Radikal von JACOBSON [9] zusammenfallen, in Fastringen jedoch untereinander verschieden sein können, wie die Beispiele im § 4 zeigen.

---

[1] Zitate und Literaturhinweise stehen in dieser Arbeit in eckigen Klammern. Die Zahl vor dem Semikolon gibt die Nummer der zitierten Abhandlung im Literaturverzeichnis an.

Ist das Radikal R eines Ringes N das Nullideal, und erfüllt N die Minimalbedingung für Rechtsideale, so enthält N ein Einselement und ist (gruppentheoretisch) endliche direkte Summe minimaler Rechtsideale. [Siehe z.B. JACOBSON 9; Seite 46, Theorem 1] . Wir verallgemeinern diesen Satz auf Fastringe, indem wir im § 3 unter geeigneten Endlichkeitsbedingungen Zerlegungssätze zum Beispiel für solche Fastringe beweisen, in denen eines der "Radikale" von § 2 das Nullideal ist. So erhalten wir auch die Resultate von BLACKETT [3; Corollary 1 zu Theorem 4, Theorem 5, 6, 10 und 11] als Sonderfälle allgemeinerer Überlegungen.

Verzichtet man auf Endlichkeitsbedingungen, so kann man noch Sätze über subdirekte Zerlegungen von Fastringen beweisen.

Schließlich übertragen wir im § 5 den Satz von ARENS und KAPLANSKY über bireguläre Ringe [1; Theorem 2.3] ([9; Seite 214, Theorem 1]) auf einen passenden Typ von Fastringen.

Der Verfasser dankt Herrn H. WIELANDT für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Hinweise und kritische Bemerkungen. Ebenso ist der Verfasser den Herren W. E. DESKINS und K. H. HOFMANN für verschiedene Anregungen dankbar, besonders für die Anregung, "bireguläre Fastringe" zu betrachten.

§ 1. Grundbegriffe.

Wir stellen in diesem Paragraphen die Definitionen zusammen, die für die folgenden Abschnitte wichtig sind. Um möglichst wenig zitieren zu müssen, werden hier auch einige Definitionen aus [2] und den Arbeiten von BLACKETT [3] und FRÖHLICH [7] wiederholt.

1.1. Wir verstehen unter einem Fastring (F.R.) N eine nichtleere Menge von Elementen a, b, c,..., für die eine Addition und eine Multiplikation erklärt sind mit den Eigenschaften

(1.1.1) N ist eine (nicht notwendig kommutative) Gruppe bezüglich der Addition mit dem Neutralelement 0,

(1.1.2) N ist eine Halbgruppe bezüglich der Multiplikation,

(1.1.3) $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in N$,

(1.1.4) $0n = 0$ für alle $n \in N$,

Im folgenden bezeichnet N stets einen Fastring, N_+ seine additive Gruppe. Wegen(1.1.3)gilt in jedem F.R. $a0 = 0$ und $a(-b) = -ab$ für beliebige $a, b \in N$.

Unterfastringe, Isomorphismen und Homomorphismen von Fastringen werden in naheliegender Weise erklärt. Die Kerne von Homomorphismen eines Fastrings N in einen Fastring N' heißen Ideale. N/K bezeichnet den Restklassenfastring von N nach dem Ideal K.

1.2. Eine additive Gruppe Γ heißt N-Gruppe ([3], [7; Definition A],[2]), wenn es eine Abbildung

$(\gamma, n) \longrightarrow \gamma n$ von $\Gamma \times N$ in Γ gibt mit

(1.2.1) $\gamma(n + m) = \gamma n + \gamma m$

(1.2.2) $\gamma(nm) = (\gamma n)m$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle $m, n \in N$.

BLACKETT [3] verwendet für N-Gruppen die Bezeichnung "right N-space", FRÖHLICH [7] schreibt die Faktoren in umgekehrter Reihenfolge, da er statt (1.1.3) die Regel $(a + b)c = ac + bc$ voraussetzt.

N_+ ist eine N-Gruppe, wenn man dem Paar $(n, m) \in N_+ \times N$ das Produkt nm zuordnet.

Wegen (1.2.1) ist $\gamma 0 = o$ und $\gamma(-n) = -\gamma n$. Dabei bedeutet o (Omikron) das Nullelement von Γ, das Zeichen 0 die Null von N. Daher ist auch $on = (o0)n = o(0n) = o0 = o$.

Eine Untergruppe Δ von Γ mit

$$\Delta N = \{ \delta n \mid \delta \in \Delta, n \in N \} \subseteq \Delta$$

heißt N-Untergruppe. Auch im folgenden soll ΔK stets die Menge der δk mit $\delta \in \Delta$, $k \in K$ bedeuten, wo Δ Untermenge einer N-Gruppe und K Untermenge eines F.R. sei.

Die N-Untergruppen von N_+ sollen kurz als N-Gruppen in N bezeichnet werden. BLACKETT [3] nannte diese N-Untergruppen "right-modules of N".

1.3. N-Gruppen $\Gamma \neq \{o\}$, die nur die trivialen N-Untergruppen $\{o\}$ und Γ haben, heißen minimal. Gilt außerdem $\Gamma N \neq \{o\}$, so heißt Γ wesentlich minimal. BLACKETT [3] nannte diese Gruppen "irreducible N-spaces". Das Wort irreduzibel" hat in dieser Arbeit jedoch eine andere Bedeutung (Vgl. 1.6). Existiert in Γ ein Element γ mit

$\gamma N = \Gamma$, so heißt Γ monogen und γ ein erzeugendes Element (im engeren Sinn). Diese Definition erfolgt in Anlehnung an N. BOURBAKI, Éléments de Mathématique, Livre II, Chap. 2, Def. 6; dort wird ein N-Modul eines Ringes N monogen genannt, wenn er von einem Element erzeugt wird. Enthält N ein Einselement 1, und ist Γ monogen mit dem erzeugenden Element γ , so bewirkt 1 die identische Abbildung von Γ , denn jedes Element $\gamma' \in \Gamma$ hat die Form γn für ein passendes $n \in N$, und nach (1.2.2) gilt $(\gamma n)1 = \gamma(n1) = \gamma n$. Gilt für jedes Element γ einer N-Gruppe Γ entweder $\gamma N = \Gamma$ oder $\gamma N = \{o\}$, und ist $\Gamma N \neq \{o\}$, so nennen wir Γ stark monogen. Eine wesentlich minimale N-Gruppe ist stark monogen, denn γN ist stets eine N-Untergruppe von Γ.

Enthält N ein Einselement, so ist umgekehrt jede stark monogene N-Gruppe wesentlich minimal, denn in diesem Fall ist $\gamma N = \Gamma$ für jedes von o verschiedene Element $\gamma \in \Gamma$.

1.4. Ein Homomorphismus (Isomorphismus) φ einer N-Gruppe Γ in eine N-Gruppe Γ' heißt N-Homomorphismus (N-Isomorphismus), wenn für alle $n \in N$ und alle $\gamma \in \Gamma$ die Beziehung $(\gamma\varphi)n = (\gamma n)\varphi$ gilt. Dabei ist $\gamma\varphi$ das Bild von γ unter φ . Die Kerne K der N-Homomorphismen von Γ nennen wir N-Kerne. Dies sind genau die Normalteiler K von Γ mit

(1.4.1) $(\kappa+\gamma)n - \gamma n \in K$ für alle $\gamma \in \Gamma, \kappa \in K$, $n \in N$.

Ein N-Kern ist stets eine N-Untergruppe. Die Faktorgruppe von Γ nach K bezeichnen wir mit Γ-K . Der Fastring N "wirkt" auf Γ-K nach der Festsetzung

(1.4.2) $\qquad (K + \gamma)n := K + \gamma n .$

Die N-Kerne von N_+ heißen Rechtsideale; die Ideale sind nach BLACKETT [3] genau die Rechtsideale T mit $NT \subseteq T$.

1.5. Ein wichtiges Beispiel eines Rechtsideals ist der Annullator $A(\Delta) := \{n \mid \delta n = o \text{ für alle } \delta \in \Delta\}$ einer Teilmenge Δ aus einer N-Gruppe Γ . Stets ist $A(\Delta) = \bigcap_{\gamma \in \Delta} A(\gamma)$. Der Annullator $A(\Gamma)$ von Γ ist ein Ideal. Ist φ ein N-Isomorphismus der N-Gruppe Γ auf die N-Gruppe Γ', so ist $A(\gamma) = A(\gamma\varphi)$ für jedes $\gamma \in \Gamma$, also ist auch $A(\Gamma) = A(\Gamma')$. Denn $\gamma n = o$ ist gleichbedeutend mit $\gamma\varphi\, n = \gamma n \varphi = o$, da φ ein Isomorphismus ist.

1.6. Eine N-Gruppe $\Gamma \neq \{o\}$, die nur die trivialen N-Kerne $\{o\}$ und Γ besitzt, soll nach WIELANDT [13] irreduzibel heißen. Eine irreduzible N-Gruppe Γ besitzt somit keine nichttriviale Faktorgruppe, die N-homomorphes Bild von Γ ist. Jede minimale N-Gruppe ist irreduzibel, da ein N-Kern stets eine N-Untergruppe ist. Die Umkehrung ist natürlich nicht richtig. Ist Δ ein irreduzibler N-Kern einer N-Gruppe Γ , so ist Δ ein minimaler N-Kern von Γ , das heißt, jeder N-Kern von Γ, der in Δ liegt, ist entweder $\{o\}$ oder Δ . Dagegen kann ein minimaler N-Kern Δ von Γ einen nichttrivialen N-Kern von Δ enthalten.

1.7. N-Homomorphismen (N-Isomorphismen) bilden N-Untergruppen und N-Kerne auf N-Untergruppen bzw. N-Kerne des Bildes ab. Ist φ ein N-Homomorphismus von Γ auf Γ' und ist Δ' ein N-Kern (bzw. eine N-Untergruppe) von Γ', so ist die Menge Δ der Elemente $\delta \in \Gamma$ mit $\delta\varphi \in \Delta'$, also das volle

Urbild von Δ' ein N-Kern (bzw. eine N-Untergruppe) von Γ. Sind Δ und E N-Kerne von Γ, so sind auch $\Delta \cap E$ und

$\Delta + E := \{ \delta + \varepsilon \mid \delta \in \Delta \ , \ \varepsilon \in E \}$ N-Kerne von Γ.

Denn $\Delta + E$ ist Normalteiler von Γ; weiter ist $(\delta + \varepsilon + \gamma)n \in \Delta + (\varepsilon + \gamma)n$, aber $(\varepsilon + \gamma)n \in E + \gamma n$, also gilt $(\delta + \varepsilon + \gamma)n - \gamma n \in \Delta + E$ für alle $\delta \in \Delta, \varepsilon \in E, \gamma \in \Gamma$ $n \in N$. Die N-Kerne einer N-Gruppe bilden einen Verband bezüglich $\cap$ und $+$.

1.8. (WIELANDT [13]). Man kann in einer N-Gruppe Γ eine Kongruenz modulo einem N-Kern Δ erklären. $\gamma \equiv \varepsilon \bmod \Delta$ bedeute $\gamma - \varepsilon \in \Delta$. Dann folgen aus $\gamma \equiv \varepsilon \bmod \Delta$ und $\gamma' \equiv \varepsilon' \bmod \Delta$ die Kongruenzen $\gamma + \gamma' \equiv \varepsilon + \varepsilon' \bmod \Delta$ und $\gamma n \equiv \varepsilon n \bmod \Delta$ für beliebiges $n \in N$. Ist $\Gamma = N_+$ und ist T ein Ideal, so folgt aus $k \equiv l \bmod T$ und $m \equiv n \bmod T$ die Kongruenz $km \equiv ln \bmod T$.

1.9. Gegeben seien N-Gruppen Γ_i $(i = 1, \ldots, s)$. Γ sei die direkte Summe der additiven Gruppen Γ_i. Dann läßt sich Γ durch die Vorschrift

$$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_s)n := \gamma_1 n + \ldots + \gamma_s n \ , \ \gamma_i \in \Gamma_i$$

zu einer N-Gruppe machen, die wir nach einem Vorschlag von H. WIELANDT "distributive Summe der N-Gruppen Γ_i" nennen und mit $\sum\oplus \Gamma_i$ bezeichnen. Die Γ_i sind N-Kerne von Γ, wie eine kurze Rechnung ergibt. Ist umgekehrt eine N-Gruppe Γ mit den N-Kernen Γ_i gegeben, und ist die additive Gruppe Γ direkte Summe der Normalteiler Γ_i, so ist die N-Gruppe Γ N-isomorph zur distributiven Summe der N-Gruppen Γ_i. Wir sagen auch kurz:

" Γ ist distributive Summe der N-Kerne Γ_i " und schreiben wiederum $\Gamma = \sum\oplus \Gamma_i$. Zum Beweis genügt es, die Beziehung $(\gamma_1 + \ldots + \gamma_s)n = \gamma_1 n + \ldots + \gamma_s n$ nachzuweisen. Dazu verwenden wir einen Schluß, den BLACKETT (im Spezialfall von Rechtsidealen eines Fastrings) beim Beweis von [3; Theorem 4] benützte. Da $\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{s-1}$ und Γ_s N-Kerne sind, gilt

$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_{s-1} + \gamma_s)n = \gamma' + \gamma_s n = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{s-1})n + \gamma_s'$

mit $\gamma' \in \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_{s-1}$ und $\gamma_s' \in \Gamma_s$. Also ist

$-(\gamma_1 + \ldots + \gamma_{s-1})n + \gamma' = \gamma_s' - \gamma_s n \in \Gamma_s \cap \sum_{j \neq s} \Gamma_j$

Aber $\Gamma_s \cap \sum \Gamma_j = \{0\}$, also ist $\gamma_s' = \gamma_s n$,

$\gamma' = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{s-1})n$ und damit

$(\gamma_1 + \ldots + \gamma_s)\, n = (\gamma_1 + \ldots + \gamma_{s-1})n + \gamma_s n$.

Wiederholung des Schlusses ergibt die behauptete Beziehung. Ganz entsprechend kann man auch die distributive Summe von Fastringen erklären: Gegeben seien Fastringe N_i $(i = 1,..,s)$ Werden die "Vektoren" $n = (n_1,\ldots,n_s)$ mit $n_i \in N_i$ "komponentenweise" addiert und multipliziert, so bilden sie einen Fastring N, der "distributive Summe der Fastringe N_i" heißen soll. Diese Konstruktion tritt zuerst bei BLACKETT [3; Theorem 14] auf. Die Mengen $N_{(i)}$ der Vektoren $(0,\ldots,n_i,0,\ldots,0)$ bilden Ideale in N, wie man durch eine kurze Rechnung nachprüft. Man kann die $N_{(i)}$ mit den N_i identifizieren.

Ist umgekehrt ein Fastring N mit den Ideale N_i $(i = 1,..,s)$ gegeben, und ist die N-Gruppe N_+ distributive Summe der Rechtsideale N_i, so ist der Fastring zur distributiven

Summe der Ideale (Fastringe) N_i isomorph, da die Multiplikationsregel

$$(n_1 + \ldots + n_s)(n_1' + \ldots + n_s') = \sum_{i=1}^{s} n_i n_i'$$

gilt. Wir sagen auch kurz: " N ist die distributive Summe der (Ideale) N_i". Zum Beweis der Multiplikationsregel beachtet man, daß N_+ die distributive Summe der Rechtsideale N_i, also

$$(n_1 + \ldots + n_s)(n_1' + \ldots + n_s') = n_1(n_1' + \ldots + n_s') + \ldots + n_s(n_1' + \ldots + n_s')$$

ist. Da die N_i aber Ideale sind, ist $n_i n_j' \in N_i N_j \subseteq N_i \cap N_j = \{0\}$ für $i \neq j$. BLACKETT benützte diesen Schluß beim Beweis von [3; Theorem 13].

§ 2. Radikalähnliche Unterstrukturen eines Fastrings.

Nach dem Vorbild von JACOBSON [9; Seite 5, Definition 2] nennen wir ein Rechtsideal $K \neq N$ eines Fastrings N modular, wenn es eine Linkseins e modulo K gibt, d.h. wenn $n - en$ in K liegt für alle $n \in N$. (JACOBSON läßt bei seiner Definition $K = N$ zu). Besitzt N eine Linkseins, so ist jedes von N verschiedene Rechtsideal modular. Ist K modular, so ist auch jedes Rechtsideal $L \neq N$ mit $L \supseteq K$ modular, denn jede Linkseins modulo K ist auch Linkseins modulo L. Ist K ein Rechtsideal, $n - en \in K$ für alle $n \in N$ und $e \in K$, so ist $K = N$. Denn in diesem Fall liegen die Elemente en in K, also auch alle $n \in N$. Ist daher K modular und e eine Linkseins modulo K, so ist $e \notin K$.

Satz 2.1. Jedes modulare Rechtsideal liegt in einem maximalen modularen Rechtsideal.

Beweis. Sei K ein modulares Rechtsideal. Man betrachtet die Menge $\mathfrak{T}$ der Rechtsideale $L \supseteq K$ mit $e \notin L$. Es ist $K \in \mathfrak{T}$, also ist $\mathfrak{T}$ nicht leer. $\mathfrak{T}$ wird durch Inklusion teilweise geordnet. Ist $\mathfrak{T}'$ eine vollständig geordnete Teilmenge von $\mathfrak{T}$, so ist $\bigcup_{L \in \mathfrak{T}'} L$ eine obere Schranke für $\mathfrak{T}'$. Nach dem Lemma von Zorn existiert also in $\mathfrak{T}$ ein maximales Rechtsideal M. Wegen $e \notin M$ ist $M \neq N$. Da K in M liegt, ist M modular.

Wir betrachten nun Beziehungen zwischen den monogenen N-Gruppen und den modularen Rechtsidealen.

Satz 2.2. Ein Rechtsideal K ist genau dann modular, wenn

es eine monogene N-Gruppe $\Gamma \neq \{o\}$ mit dem erzeugenden Element γ gibt, für das $A(\gamma) = K$ gilt. Γ ist N-isomorph zu $N_+ - A(\gamma)$.

Beweis. Sei Γ eine monogene N-Gruppe mit dem erzeugenden Element γ, und sei $\Gamma \neq \{o\}$. Dann definiert die Abbildung $n \to \gamma n$ einen N-Isomorphismus von $N_+ - A(\gamma)$ auf Γ. Da $\gamma \in \Gamma$ ist, gibt es Elemente $e \in N$ mit $\gamma e = \gamma$. Daraus folgt $\gamma en = \gamma n$ oder $n - en \in A(\gamma)$ für alle $n \in N$. Da $\Gamma \neq \{o\}$ ist, muß $A(\gamma) \neq N$ sein. Also ist $A(\gamma)$ ein modulares Rechtsideal und e eine Linkseins modulo $A(\gamma)$.

Ist umgekehrt K ($\neq N$) ein modulares Rechtsideal und e eine Linkseins modulo K, so ist $N_+ - K$ eine monogene N-Gruppe, die nicht die Nullgruppe ist, denn nach (1.4.2) ist $(e + K)n = en + K = n + K$ für alle $n \in N$, also $(e + K)N = N_+ - K$, und $e + K$ ist ein Element von $N_+ - K$. Genau die Elemente $k \in K$ erfüllen die Beziehung $(e + K)k = K$.

Für Ringe stehen die Sätze 2.1 und 2.2 bei JACOBSON [9; Seite 6, Proposition 2 bzw. Seite 5, Proposition 1].

Satz 2.3. Sei $\Gamma \neq \{o\}$ eine monogene N-Gruppe und γ ein erzeugendes Element von Γ.

a) Genau dann ist Γ irreduzibel, wenn $A(\gamma)$ ein maximales Rechtsideal ist. ($A(\gamma)$ ist dann auch ein maximales modulares Rechtsideal).

b) Genau dann ist Γ minimal, (und damit wesentlich minimal), wenn $A(\gamma)$ eine maximale N-Gruppe in N ist. ($A(\gamma)$ ist dann auch ein maximales Rechtsideal).

Beweis. Die Abbildung $\varphi: n \to \gamma n$ ist ein N-Homomorphismus von N_+ auf Γ mit dem Kern $A(\gamma)$. Die N-Gruppen $\neq N$ in N, die $A(\gamma)$ echt enthalten, und die Rechtsideale, die von N verschieden sind und $A(\gamma)$ echt enthalten, werden durch φ auf nichttriviale N-Untergruppen bzw. nichttriviale N-Kerne von Γ abgebildet. Ist umgekehrt Δ eine nichttriviale N-Untergruppe (ein nichttrivialer N-Kern) von Γ, so ist das volle Urbild von Δ eine N-Gruppe in N, die $A(\gamma)$ enthält (bzw. ein Rechtsideal, das $A(\gamma)$ enthält). Daraus folgt sofort die Behauptung.

Die Sätze 2.2 und 2.3 b entsprechen [2; Satz 3.1] und verallgemeinern [11; Theorem 3.1 und 5.1] und [8; Theorem 1.2]. Aus 2.1 und 2.3 a erhält man den Folgesatz 2.4.

Folgesatz 2.4. Jede monogene N-Gruppe $\Gamma \neq \{o\}$ besitzt wenigstens einen maximalen echten N-Kern Δ. $\Gamma - \Delta$ ist irreduzibel.

2.5. Um die folgenden Sätze bequemer formulieren zu können, setzen wir fest: Eine N-Gruppe $\Gamma \neq \{o\}$ heißt

a) vom Typ 0, wenn sie monogen und irreduzibel ist,

b) vom Typ 1, wenn sie stark monogen und irreduzibel ist,

c) vom Typ 2, wenn sie wesentlich minimal ist.

Definition 2.6. $J_\nu(N)$ ist der Durchschnitt der Annullatoren der N-Gruppen vom Typ ν für $\nu = 0, 1, 2$. $D(N)$ ist der Durchschnitt der maximalen modularen Rechtsideale von N. Gibt es keine N-Gruppen vom Typ ν bzw. keine maximalen modularen Rechtsideale, so sei $J_\nu(N)$ bzw. $D(N)$ gleich N.

Die Definition von J_0 geht auf H. WIELANDT zurück.

(Muß der Fastring nicht besonders bezeichnet werden, so schreiben wir J_ν statt $J_\nu(N)$). Betrachtungen über D(N) im Spezialfall von distributiv erzeugten Fastringen mit Einselement wurden zuerst von LAXTON [12] veröffentlicht. (LAXTON bezeichnete D(N) als "quasi-radical"). Dabei heißt ein Fastring N nach FRÖHLICH [6; Definition 1.2.4] distributiv erzeugt, wenn die multiplikative Halbgruppe der zweiseitig distributiven Elemente die additive Gruppe N_+ erzeugt. J_2 wurde in [2] eingeführt. ([2; Definition 2.1 a]). J_2 ist gleich dem Durchschnitt der Annullatoren aller minimalen N-Gruppen. LAXTON [12] definierte und untersuchte J_2 im Fall distributiv erzeugter Fastringe mit Einselement. Einige seiner Resultate sind Einschränkungen von Sätzen aus [2] auf den von LAXTON betrachteten Sonderfall. Die J_ν sind Ideale, D(N) ist ein Rechtsideal. Da eine N-Gruppe vom Typ ν zugleich vom Typ $\nu-1$ ($\nu = 2, 1$) ist, gilt $J_0 \subseteq J_1 \subseteq J_2$.

Ist γ Element einer N-Gruppe Γ, so ist $A(\Gamma) \subseteq A(\gamma)$. Ist ferner Γ vom Typ 0 und γ ein erzeugendes Element von Γ, so ist $A(\gamma)$ nach 2.3 a ein maximales modulares Rechtsideal. Ist umgekehrt K ein maximales modulares Rechtsideal von N, so gibt es nach 2.2 und 2.3 a eine N-Gruppe vom Typ 0 mit dem erzeugenden Element γ und $A(\gamma) = K$. Daher ist $J_0(N) \subseteq D(N)$ nach Definition 2.6.

Satz 2.7. a) $J_1(N)$ ist gleich dem Durchschnitt der maximalen modularen Rechtsideale K von N, für die $N_+ - K$ stark monogen ist.

b) $J_2(N)$ ist gleich dem Durchschnitt der maximalen modu-

laren Rechtsideale K von N, die maximale nichttriviale N-Gruppen in N sind, (d.h., für die $N_+ - K$ eine N-Gruppe vom Typ 2 ist).

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß N-Gruppen vom Typ 1 oder 2 stark monogen sind und daß $A(\Gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A(\gamma)$ ist.

Aus Satz 2.7 a und der Definition von D(N) folgt $D(N) \subseteq J_1$. Wir haben damit

(2.7.1) $\quad J_0(N) \subseteq D(N) \subseteq J_1(N) \subseteq J_2(N)$.

Im § 4 werden Beispiele von Fastringen mit $D(N) \subset J_1 = J_2$, $D(N) = J_1 \subset J_2$ und $J_0 \subset D(N)$ angegeben.

Ist N ein Fastring mit Einselement, so ist nach 1.3 jede stark monogene N-Gruppe vom Typ 2, also ist in diesem Fall a fortiori jede N-Gruppe vom Typ 1 sogar vom Typ 2. Da andererseits jede N-Gruppe vom Typ 2 auch vom Typ 1 ist, erhält man

Satz 2.8. Ist N ein Fastring mit Einselement, so ist $J_1(N) = J_2(N)$.

2.9. Erfüllen die N-Gruppen in N die Minimalbedingung, so liegt $J_2(N)$ nach [2; Satz 4.2] in dem Radikal R, das DESKINS in [4] definierte. Also ist in diesem Fall $J_\nu(N) \subseteq R$ für $\nu = 0, 1, 2$.

2.10. Ist Γ eine N-Gruppe und K ein Ideal von N, das in $A(\Gamma)$ liegt, so kann man Γ offenbar durch die Festsetzung $\gamma(n + K) := \gamma n$ zu einer N/K-Gruppe mit dem Annullator $A(\Gamma)/K$ machen. Ist dabei Γ eine N-Gruppe vom Typ ν, so ist auch Γ eine N/K-Gruppe vom Typ ν .

Ist umgekehrt Γ eine N/K-Gruppe, so kann man Γ durch dieselbe Festsetzung wie oben zu einer N-Gruppe machen. Dabei bleibt der Typ gleichfalls erhalten. Der Annullator $A(\Gamma)$ der N-Gruppe Γ umfaßt K. Er besteht aus allen $n \in N$ mit $n + K \in \bar{A}(\Gamma)$, wo $\bar{A}(\Gamma) \subseteq N/K$ der Annullator der N/K-Gruppe Γ ist. Diese Überlegungen gelten insbesondere für $K = A(\Gamma)$. In diesem Fall ist der Annullator der N/K-Gruppe Γ das Nullideal in N/K, das heißt N/K wird auf Γ "treu dargestellt".

Definition 2.11. Ein Fastring N heißt ν-primitiv, wenn es eine N-Gruppe Γ vom Typ ν mit $A(\Gamma) = \{0\}$ gibt; ein Ideal P aus N heißt ν-primitiv, wenn N/P ein ν-primitiver Fastring ist.

Ein ν-primitives Ideal ist demnach stets von N verschieden. Die Überlegungen von 2.10 ergeben

Satz 2.12. a) Die ν-primitiven Ideale von N sind genau die Annullatoren der N-Gruppen vom Typ ν.

b) $J_\nu(N)$ ist der Durchschnitt der ν-primitiven Ideale von N.

Da J_ν im Annullator jeder N-Gruppe vom Typ ν liegt, ist jede N-Gruppe vom Typ ν nach 2.10 eine N/J_ν-Gruppe vom Typ ν. Umgekehrt ist jede N/J_ν-Gruppe vom Typ ν nach 2.10 eine N-Gruppe desselben Typs. Der Durchschnitt der Annullatoren der N-Gruppen vom Typ ν ist $J_\nu(N)$, also gilt

Satz 2.13. $J_\nu(N/J_\nu(N)) = J_\nu(N)/J_\nu(N)$ für $\nu = 0, 1, 2$.

Satz 2.14. Ist K ein Ideal von N und $J_\nu(N/K) = K/K$,

so ist $K \geq J_\nu(N)$ für $\nu = 0, 1, 2$.

Beweis. Die N/K-Gruppen vom Typ ν sind nach 2.10 auch N-Gruppen vom Typ ν . Der Durchschnitt der Annullatoren der N-Gruppen vom Typ ν , die man nach 2.10 aus N/K-Gruppen vom Typ ν erhält, ist das Ideal K von N. Also gilt $K \geq J_\nu(N)$.

Die Sätze 2.12, 2.13, 2.14 ergeben für $\nu = 2$ die Sätze 2.6, 2.7, 2.4 und 2.5 von [2].

Wir betrachten im nächsten Satz den Sonderfall, daß N ein Ring ist.

Satz 2.15. Ist N ein Ring und Γ eine N-Gruppe vom Typ 0, so ist Γ kommutativ, die Abbildung $\gamma \to \gamma n$ ist ein Endomorphismus von Γ , und Γ ist ein irreduzibler Rechts-N-Modul im Sinne der Ringtheorie [9; Seite 4, Definition 1]

Beweis. Ist γ ein erzeugendes Element von Γ , so ist Γ zu $N_+ - A(\gamma)$ N-isomorph. Daher ist Γ kommutativ, da N_+ es ist, und die Abbildung $(m + A(\gamma)) \to mn + A(\gamma)$ ist ein Endomorphismus, da N ein Ring ist. Also ist auch die Abbildung $\gamma \to \gamma n$ ein Endomorphismus, Γ ist ein Rechts-N-Modul, und jeder N-Untermodul von Γ ist ein N-Kern von Γ . Aber Γ besitzt keinen nichttrivialen N-Kern; außerdem ist $\Gamma N \neq \{o\}$, weil $\Gamma \neq \{o\}$ und monogen ist. Daher ist Γ im Sinne der Ringtheorie irreduzibel.

Umgekehrt ist jeder irreduzible Rechts-N-Modul eines Ringes N eine N-Gruppe vom Typ 0. So erhält man den

Folgesatz 2.16. a) Ist N ein Ring, so ist $J_0(N)$ das Jacobsonsche Radikal von N.

b) Für Ringe N ist $J_0(N) = D(N) = J_1(N) = J_2(N)$.

Beweis. a) folgt aus 2.15, der Definition von $J_0(N)$ und der Definition des Jacobsonschen Radikals [9; Seite 4, Definition 2]. Nach Satz 2.3 von[2]fällt für Ringe auch $J_2(N)$ mit dem Jacobsonschen Radikal zusammen. Daraus folgt mit Teil a und (2.7.1) die Behauptung b.

Eine N-Gruppe K in N heißt nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl z gibt mit $K^z = \{0\}$. Die Beziehung $K^z = \{0\}$ besagt, daß alle Produkte aus z Elementen von K verschwinden. [FRÖHLICH 6; Definition 3.6.1].BLACKETT untersuchte in [3] Fastringe mit Minimalbedingung für die N-Gruppen in N, in denen $\{0\}$ die einzige nilpotente N-Gruppe in N ist. Solche Fastringe nannte er halbeinfach. Wir zitieren aus [2] folgendes Kriterium für Halbeinfachheit.

Satz 2.17. N sei ein Fastring mit Minimalbedingung für die N-Gruppen in N. Genau dann ist N halbeinfach, wenn $J_2(N)$ das Nullideal ist. ([2; Satz 4.1]).
Ohne Endlichkeitsbedingungen (Kettenbedingungen) kann man noch die folgenden beiden Sätze beweisen.

Satz 2.18. Ist K eine N-Gruppe in N, und sind alle Elemente von K nilpotent, so ist $K \subseteq J_2(N)$.

Beweis (nach einer mündlichen Mitteilung von H.WIELANDT). Sei $K \not\subseteq J_2(N)$. Dann gibt es eine N-Gruppe Γ vom Typ 2 mit $\Gamma K \neq \{o\}$, also existiert in Γ ein Element $\gamma \neq o$ mit $\gamma K \neq \{o\}$, und da γK eine N-Untergruppe von Γ ist, muß $\gamma K = \Gamma$ sein. Deshalb gibt es ein $k \in K$ mit $\gamma k = \gamma$. Aber aus dieser Beziehung folgt $\gamma k^z = \gamma$ für alle natür-

lichen Zahlen z, und da k nilpotent ist, muß $\gamma = o$ sein im Widerspruch zur Wahl von γ. Also ist $K \subseteq J_2(N)$.

Die Voraussetzungen von 2.18 sind insbesondere dann erfüllt, wenn K nilpotent ist. Daher folgt LAXTONs Resultat [12; Theorem 1.5] aus Satz 2.18 . Das Beispiel 4.1 zeigt, daß eine N-Gruppe in N, deren Elemente sämtlich nilpotent sind, nicht immer in $J_1(N)$ liegt.

Satz 2.19. Ist N ein Fastring mit Einselement, so enthält D(N) alle nilpotenten Rechtsideale von N.

Beweis. Wir modifizieren den Beweis von [12; Theorem 1.5]. Sei K ein nilpotentes Rechtsideal von N und $K^z = \{0\}$, das heißt $k_1k_2\ldots k_z = 0$ für jede Wahl der $k_i \in K$. Sei R ein maximales Rechtsideal von N. Da N ein Einselement enthält, ist R modular. Wir müssen die Beziehung $K \subseteq R$ nachweisen. Ist $K \not\subseteq R$, so ist $K + R = N$, also $1 = r + k$ mit $r \in R$ und $k \in K$. Nun ist

$$k_1\ldots k_{z-1} = (r + k)k_1\ldots k_{z-1} \equiv kk_1\ldots k_{z-1} = 0 \bmod R$$

für beliebige $k_i \in K$, da R ein Rechtsideal ist. Daher ist auch $k_1\ldots k_{z-2} = (r + k)k_1\ldots k_{z-2} \equiv kk_1\ldots k_{z-2} \equiv 0 \bmod R$. Durch Wiederholung des Schlusses erhält man schließlich $k_1 \in R$ für beliebiges $k_1 \in K$ und damit $K \subseteq R$ im Widerspruch zur Annahme $K \not\subseteq R$. Also ist in jedem Fall $K \subseteq R$ und daher auch $K \subseteq D(N)$.

Für distributiv erzeugte Fastringe ist Satz 2.19 eine Teilaussage von [12; Theorem 3.7] . Man erhält aus Satz 2.19 den

Folgesatz 2.20. [12; Theorem 3.1] . Ist $J_2(N)$ nilpotent,

so ist $J_2(N) = D(N)$.

Denn nach 2.19 ist $J_2(N) \leq D(N)$ und nach (2.7.1) ist $D(N) \leq J_2(N)$.

LAXTON konnte beweisen: Ist N ein distributiv erzeugter Fastring mit Minimalbedingung für die N-Gruppen in N und besitzt N ein Einselement, so ist D(N) nilpotent. [12; Theorem 3.3]. Daraus ergibt sich, daß unter denselben Voraussetzungen über den Fastring $J_2(N)$ genau dann nilpotent ist, wenn die Beziehung $J_2(N) = D(N)$ gilt. [12; Theorem 3.4]. Der Verfasser konnte dieses Resultat von LAXTON bisher nicht für beliebige Fastringe (mit einer geeigneten Minimalbedingung) beweisen.

§ 3. Zerlegungssätze.

In diesem Paragraphen geben wir Bedingungen dafür an, daß eine N-Gruppe distributive Summe von N-Kernen ist, und ziehen daraus Folgerungen.

Satz 3.1. Sei Γ eine N-Gruppe; es existiere eine endliche Menge $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_s\}$ von maximalen echten N-Kernen von Γ mit den Eigenschaften

$$\bigcap_{i=1}^{s} \Delta_i = \{o\} ,$$

$$\Gamma_j := \bigcap_{i \neq j} \Delta_i \neq \{o\} .$$

Dann ist Γ distributive Summe der N-Kerne Γ_j $(j = 1, \ldots, s)$, und die Γ_j sind irreduzibel.

Daraus folgt: Die Γ_j sind minimale N-Kerne, und es gilt $(\gamma_1 + \ldots + \gamma_s)n = \gamma_1 n + \ldots + \gamma_s n$, wobei n ein beliebiges Element von N und $\gamma_j \in \Gamma_j$ ist.

Beweis. Sei $1 \leq j \leq s$. Die Γ_j sind nach 1.7 N-Kerne von Γ. Wegen $\Gamma_j \cap \Delta_j = \{o\}$ ist $\Gamma_j \not\subseteq \Delta_j$ und $\Gamma_j + \Delta_j = \Gamma$. Daher ist Γ als additive Gruppe direkte Summe der Normalteiler Γ_j und Δ_j, also ist die N-Gruppe Γ distributive Summe der N-Kerne Γ_j und Δ_j. Daraus folgt, daß Γ_j N-isomorph zu $\Gamma - \Delta_j$ ist. Da Δ_j maximaler N-Kern ist, müssen $\Gamma - \Delta_j$ und Γ_j irreduzibel sein. Also ist Γ_j minimaler N-Kern von Γ. Nun sei $0 < r \leq s$. Wir definieren

$\Lambda_r := \bigcap_{i=1}^{r} \Delta_i$ und beweisen die Beziehung

(3.1.1) $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r \oplus \Lambda_r$

durch vollständige Induktion nach r. Für $r = 1$ ist wegen $\Lambda_1 = \Delta_1$ und $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Delta_1$ die Behauptung richtig.

Nun sei (3.1.1) schon gezeigt für ein $r \leq s-1$. Der N-Kern Λ_r liegt nicht in Δ_{r+1}, also ist $\Delta_{r+1} + \Lambda_r = \Gamma$, da Δ_{r+1} maximaler N-Kern ist. Damit ist

$\Gamma - \Delta_{r+1} = (\Delta_{r+1} + \Lambda_r) - \Delta_{r+1}$ isomorph zu $\Lambda_r - (\Lambda_r \cap \Delta_{r+1}) = \Lambda_r - \Lambda_{r+1}$ bezüglich der Addition. Bei diesem Isomorphismus entsprechen sich $\gamma + \Delta_{r+1}$ und $\lambda + \Lambda_{r+1}$ mit $\gamma \equiv \lambda \mod \Delta_{r+1}$ und $\lambda \equiv o \mod \Lambda_r$. Daraus folgen nach 1.8 die Kongruenzen $\gamma n \equiv \lambda n \mod \Delta_{r+1}$ und $\lambda n \equiv o \mod \Lambda_r$ für beliebiges $n \in N$. Somit sind die N-Gruppen $\Gamma - \Delta_{r+1}$ und $\Lambda_r - \Lambda_{r+1}$ sogar N-isomorph. $\Gamma - \Delta_{r+1}$ ist irreduzibel, da Δ_{r+1} maximaler N-Kern ist, also ist auch $\Lambda_r - \Lambda_{r+1}$ irreduzibel, und Λ_{r+1} ist ein maximaler N-Kern von Λ_r. Da $\Gamma_{r+1} \cap \Lambda_{r+1} = \{o\}$ und $\Gamma_{r+1} \subseteq \Lambda_r$, ist $\Lambda_{r+1} + \Gamma_{r+1} = \Lambda_r$, also ist auch $\Lambda_r = \Gamma_{r+1} \oplus \Lambda_{r+1}$ und

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r \oplus \Gamma_{r+1} \oplus \Lambda_{r+1}$$

Somit gilt (3.1.1) für alle $r \leq s$. Aber $\Lambda_s = \{o\}$. Deshalb ist $\Gamma = \sum_{i=1}^{s} \oplus \Gamma_i$. (Vgl. JACOBSON [9; Seite 40/41]).

Satz 3.1 ergibt speziell für $\Gamma = N_+$ den

Folgesatz 3.2. Ist N ein Fastring, und existiert eine endliche Menge $\{M_1, \ldots, M_s\}$ von maximalen echten Rechtsidealen von N mit $\bigcap_{i=1}^{s} M_i = \{o\}$,

$$K_j := \bigcap_{i \neq j} M_i \neq \{o\},$$

so sind die K_j irreduzible Rechtsideale von N, und $N_+ = \sum_{j=1}^{s} \oplus K_j$.

Satz 3.3. Ist N ein Fastring, und existiert eine endliche Menge $\{M_1, \ldots, M_s\}$ von echten maximalen modularen Rechtsidealen von N mit $\bigcap_{i=1}^{s} M_i = \{o\}$, so besitzt

N eine Linkseins.

Beweis. (Nach dem Vorbild von JACOBSON [9; Seite 47, Proposition 1]). Wir zeigen, daß das Nullideal von N modular ist. Dies ist klar für $s = 1$ und $M_1 = \{0\}$. Wir nehmen nun $s > 1$ an. Zunächst zeigen wir: Ist M ein maximales modulares Rechtsideal von N und K ein modulares (nicht notwendig maximales) Rechtsideal von N, so ist $M \cap K$ modular.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $M \cap K \neq K$ annehmen. Dann ist $K \not\subseteq M$ und $M + K = N$. Ist nun e eine Linkseins modulo M, f eine Linkseins modulo K, so gilt $e = e' + e''$ und $f = f' + f''$ mit e', f' aus M und e'', f'' aus K. Es gilt $e \equiv e'' \equiv e'' + f' \mod M$, also $0 \equiv n - en \equiv n - (e'' + f')n \mod M$ für alle $n \in N$. Ebenso gilt $f \equiv f' \equiv e'' + f' \mod K$ und $0 \equiv n - fn \equiv n - (e'' + f')n \mod K$. Also ist $n - (e'' + f')n \in M \cap K$ für alle $n \in N$, und $M \cap K$ ist modular.

Für $M = M_1$, $K = M_2$ folgt daraus, daß $M_1 \cap M_2$ modular ist. Wiederholt man diesen Schluß mit $M = M_i$, $K = \bigcap_{j \leq i-1} M_j$ $(2 \leq i \leq s)$, so ergibt sich schließlich, daß $\bigcap_{i=1}^{s} M_i = \{0\}$ modular ist. Also besitzt N eine Linkseins.-

Die Voraussetzungen von Satz 3.2 und 3.3 sind erfüllt in Fastringen $N \neq \{0\}$ mit Minimalbedingung für die Rechtsideale und $D(N) = \{0\}$; insbesondere genügt $J_1(N) = \{0\}$ oder $J_2(N) = \{0\}$. Beachtet man noch, daß die K_j in Satz 3.2 N-isomorph zu $N_+ - M_j$ sind, so erhält man den

Folgesatz 3.4. $N \neq \{0\}$ sei ein Fastring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale.

a) Ist $D(N) = \{0\}$, so ist N_+ distributive Summe von endlich vielen Rechtsidealen, die N-Gruppen vom Typ 0 sind, und N hat eine Linkseins.

b) Ist sogar $J_\nu(N) = \{0\}$ für $\nu = 1$ oder 2, so ist N_+ distributive Summe von endlich vielen Rechtsidealen, die N-Gruppen vom Typ ν sind.

Für halbeinfache Fastringe folgt die Darstellung von N_+ als distributive Summe aus [BLACKETT 3; Corollary 1 zu Theorem 3 in Verbindung mit Theorem 2]. Die Existenz einer Linkseins sichert in diesem Fall [3; Corollary 1 zu Theorem 4].

Satz 3.4 läßt sich teilweise umkehren.

Satz 3.5. Ist N_+ distributive Summe von endlich vielen Rechtsidealen, die N-Gruppen vom Typ ν sind, und enthält N eine Linkseins, so ist $D(N) = \{0\}$ für $\nu = 0$ und $J_\nu(N) = \{0\}$ für $\nu = 1$ oder 2.

Beweis. Da N eine Linkseins enthält, sind alle Rechtsideale modular. N_+ sei distributive Summe der Rechtsideale K_i $(i = 1,\ldots,s)$, und die K_i seien N-Gruppen vom Typ ν. Wir setzen $L_i := \sum_{j \neq i} \oplus K_j$. Dann ist K_i N-isomorph zu $N_+ - L_i$, und $N_+ - L_i$ ist eine N-Gruppe vom Typ ν, da K_i es ist. L_i ist daher maximal modular. Wegen $\bigcap_i L_i = \{0\}$ folgt aus 2.7 die Behauptung.

Man erhält eine Variante von Satz 3.2, wenn man voraussetzt, daß die M_i im Satz 3.2 maximale echte Ideale sind.

Satz 3.6. Sei N ein Fastring. Es existiere eine endliche Menge $\{M_1, \ldots, M_s\}$ von maximalen echten Idealen von N mit

$$\bigcap_{i=1}^{s} M_i = \{0\},$$

$$K_j := \bigcap_{i \neq j} M_i \neq \{0\}.$$

Dann ist N distributive Summe der Ideale K_j. Die Fastringe K_j haben nur triviale Ideale.

Daraus folgt nach 1.9: In N gilt die Multiplikationsregel

$(k_1 + \ldots + k_s)(k_1' + \ldots + k_s') = k_1k_1' + \ldots + k_sk_s'$

für $k_i, k_i' \in K_i$.

Beweis. Der Beweis unterscheidet sich nur in wenigen Punkten vom Beweis von Satz 3.1. Für jedes j mit $1 \leq j \leq s$ ist die N-Gruppe N_+ distributive Summe der Rechtsideale K_j und M_j, also ist der F.R. N distributive Summe der Ideale K_j und M_j nach 1.9. Da K_j isomorph zu N/M_j und M_j ein maximales Ideal ist, enthält der Fastring K_j nur triviale Ideale. Nun sei $Q_r := \bigcap_{i=1}^{r} M_i$. Die Beziehung

$N = K_1 \oplus \ldots \oplus K_r \oplus Q_r$ (distributive Summe von Idealen)

beweist man durch vollständige Induktion nach r, indem man für $r \leq s-1$ zeigt, daß Q_r distributive Summe der Ideale Q_{r+1} und K_{r+1} ist. Die additive Gruppe von N/M_{r+1} und die additive Gruppe von Q_r/Q_{r+1} sind isomorph. Dabei entsprechen sich $m + M_{r+1}$ und $p + Q_{r+1}$ bzw. $n + M_{r+1}$ und $q + Q_{r+1}$ mit $m \equiv p \mod M_{r+1}$ und $n \equiv q \mod M_{r+1}$ sowie $p \equiv q \equiv 0 \mod Q_r$. Aus den angeschriebenen Kongruenzen folgt aber nach 1.8 $mn \equiv pq \mod M_{r+1}$ und $pq \equiv 0 \mod Q_r$. Daher sind sogar die Fastringe N/M_{r+1} und Q_r/Q_{r+1} isomorph. Da M_{r+1} ein maximales Ideal von N ist, muß Q_{r+1} ein maxi-

males Ideal von Q_r sein. Wegen $K_{r+1} \cap Q_{r+1} = 0$ und $K_{r+1} \leq Q_r$ ist daher $K_{r+1} + Q_{r+1} = Q_r$, also ist Q_r distributive Summe der Ideale K_{r+1} und Q_{r+1}.-

Sind die Ideale M_i in Satz 3.6 modular, so zeigt man wie im Beweis von 3.3 die Existenz einer Linkseins in N. DESKINS gab Satz 3.6 an für den Fall, daß N distributiv erzeugt ist und die Minimalbedingung für die N-Gruppen in N gilt. [5; Theorem 1]. (DESKINS benützte die Voraussetzung, daß der Durchschnitt der maximalen modularen Ideale von N das Nullideal ist. Unter der angegebenen Minimalbedingung folgt daraus aber sofort, daß auch die Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllt sind.)

Wir ziehen nun Folgerungen aus der Darstellung von N_+ als distributive Summe.

Satz 3.7. Sei N ein Fastring und Γ eine N-Gruppe vom Typ 0 mit dem erzeugenden Element γ. Sei K ein minimales Rechtsideal, das nicht in $A(\gamma)$ liegt. Dann ist Γ N-isomorph zu K. Ist nun N_+ distributive Summe von endlich vielen minimalen Rechtsidealen K_i, so ist jede N-Gruppe vom Typ 0 (1 oder 2) N-isomorph zu einem geeigneten K_j. Also gibt es nur endlich viele Klassen N-isomorpher N-Gruppen vom Typ 0.

Beweis. Sei Γ eine N-Gruppe vom Typ 0 mit dem erzeugenden Element γ und K ein minimales Rechtsideal, das nicht in $A(\gamma)$ liegt. Die Abbildung $\varphi: n \to \gamma n$ ist ein N-Homomorphismus von N_+ auf Γ, also ist γK ein N-Kern von Γ, weil K ein Rechtsideal ist, und $\gamma K \neq \{0\}$, da

$K \not\subseteq A(\gamma)$ ist. Aber Γ ist irreduzibel, also ist $\gamma K = \Gamma$. Die Einschränkung von γ auf K ist ein N-Homomorphismus von K auf Γ mit dem Kern $K \cap A(\gamma)$. Da K ein minimales Rechtsideal und $K \cap A(\gamma) \neq K$ ist, muß $K \cap A(\gamma) = \{0\}$ sein. Also sind Γ und K N-isomorph. Ist nun N_+ distributive Summe von endlich vielen minimalen Rechtsidealen K_i, so gibt es mindestens ein K_j mit $K_j \not\subseteq A(\gamma)$, da $A(\gamma) \neq N$ ist Γ und K_j sind somit N-isomorph. Da es nur endlich viele K_i gibt, existieren auch nur endlich viele Klassen N-isomorpher N-Gruppen vom Typ 0.

Bemerkung 3.8. Ist $N \neq \{0\}$ ein Fastring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale und $J_\nu(N) = \{0\}$ für $\nu = 1$ oder 2, so ist N_+ nach 3.4 b distributive Summe von endlich vielen Rechtsidealen, die N-Gruppen vom Typ ν sind. Daher ist nach 3.7 jede N-Gruppe vom Typ 0 sogar vom Typ ν. Dies gilt speziell für halbeinfache Fastringe nach Satz 2.17.- Die Resultate von BLACKETT [3; Theorem 5 und 6] folgen aus 3.7.

Der nächste Satz gibt u. a. eine hinreichende Bedingung dafür an, daß alle N-Gruppen vom Typ 1 N-isomorph sind.

Satz 3.9. Sei N ein 1-primitiver Fastring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale. Dann gilt

a) Alle N-Gruppen vom Typ 0 sind N-isomorph und sämtlich vom Typ 1. (Vgl. [11; Nr. 3.4])

b) N enthält nur die trivialen Ideale N und $\{0\}$.

Beweis. N ist 1-primitiv, also ist $J_1(N) = \{0\} \neq N$, und nach 3.4 b ist N_+ distributive Summe von endlich

vielen Rechtsidealen K_i, die N-Gruppen vom Typ 1 sind. Daher ist nach 3.7 jede N-Gruppe vom Typ 0 sogar vom Typ 1. Nun sei Γ eine N-Gruppe vom Typ 1 mit $A(\Gamma) = \{0\}$ Es gibt zu jedem "distributiven Summanden" K_i ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma K_i \neq \{0\}$. Daher ist γ ein erzeugendes Element von Γ und $K_i \not\subseteq A(\gamma)$, also ist K_i nach 3.7 N-isomorph zu Γ. Deshalb sind alle K_i untereinander N-isomorph, also sind auch alle N-Gruppen vom Typ 1 N-isomorph. Damit ist die Behauptung 3.9 a bewiesen.

b) Nach 1.5 haben N-isomorphe N-Gruppen denselben Annullator. Daher ist $A(K_i) = \{0\}$ für alle K_i nach Teil a. Enthält N ein zweiseitiges Ideal $T \neq N$, so muß $K_j \not\subseteq T$ für mindestens ein K_j gelten. Da K_j minimales Rechtsideal ist, folgt daraus $K_j \cap T = \{0\}$, also $K_j T \subseteq K_j \cap T = \{0\}$ und $T \subseteq A(K_j) = \{0\}$.

Bemerkungen. 1) N sei ein Fastring, der die Voraussetzungen von 3.9 erfüllt, der aber nicht 2-primitiv ist. Dann existiert nach 3.9 a keine N-Gruppe vom Typ 2. Also ist $J_2(N) = N$. Weil N aber 1-primitiv ist, muß $J_1(N) = \{0\}$ sein, und N enthält eine Linkseins nach 3.4. Ein Fastring mit diesen Eigenschaften wird in 4.1 angegeben.

2) DESKINS [5] definierte (im Falle distributiv erzeugter Fastringe mit Minimalbedingung für die N-Gruppen in N) als Radikal eines Fastrings N den Durchschnitt R der maximalen modularen Ideale von N. Jedes 1-primitive Ideal P in einem Fastring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale ist maximal nach 3.9 b. Außerdem ist P

modular, denn N/P enthält nach 3.4 eine Linkseins, weil $J_1(N/P) = P/P$ ist. Nach 2.12 b ist daher $R \subseteq J_1(N)$ in Fastringen mit Minimalbedingung für die Rechtsideale, wobei wir die Definition von R auch für solche Fastringe gelten lassen.

Eine Art Umkehrung zu 3.9 b ist der folgende

Satz 3.10. Ist N ein Fastring, der nur triviale Ideale enthält, und ist $\Gamma \neq \{o\}$ eine N-Gruppe vom Typ 0, so ist $A(\Gamma)$ das Nullideal von N, und N ist 0-primitiv.
Dies ist klar, denn $A(\Gamma)$ kann wegen $\Gamma \neq \{o\}$ nicht gleich N sein.

Nun sei $N \neq \{0\}$ ein Fastring mit Minimalbedingung für die Rechtsideale und $J_1(N) = \{0\}$. Nach 3.4 b und 3.7 gibt es nur endlich viele Klassen N-isomorpher N-Gruppen vom Typ 1, also gibt es nach 1.5 und 2.12 a auch nur endlich viele 1-primitive Ideale in N. Nach 3.9 b sind die 1-primitiven Ideale maximal. Sind $P_1, \ldots, P_s$ die 1-primitiven Ideale von N, so ist $\bigcap_{i=1}^{s} P_i = J_1(N) = \{0\}$.
Wir zeigen: $K_j := \bigcap_{i \neq j} P_i \neq \{0\}$. Sei Γ eine N-Gruppe vom Typ 1 mit dem Annullator P_j. Es gibt nach 3.7 ein zu Γ N-isomorphes Rechtsideal R von N. Nun sei Δ eine N-Gruppe vom Typ 1 und $\Delta R \neq \{o\}$. Dann gibt es ein $\delta \in \Delta$ mit $\delta R \neq \{o\}$, also ist δ erzeugendes Element von Δ und $R \not\subseteq A(\delta)$, daher ist R nach 3.7 N-isomorph zu Δ, und Δ und Γ sind N-isomorph. Somit annulliert R alle N-Gruppen vom Typ 1, die nicht N-isomorph zu sind. Also gilt $\{0\} \neq R \subseteq K_j$.-

Nun kann man Satz 3.6 anwenden und erhält

Satz 3.11. Gilt in $N \neq \{0\}$ die Minimalbedingung für die Rechtsideale und ist $J_1(N) = \{0\}$, so ist N distributive Summe endlich vieler Ideale K_i $(i = 1, \ldots, s)$. Die K_i sind Fastringe, die nur triviale Ideale enthalten. Jedes K_i annulliert alle N-Gruppen vom Typ 1 mit Ausnahme einer Klasse von N-isomorphen N-Gruppen dieses Typs.

Nun sei N halbeinfach. Dann ist N nach 3.11 distributive Summe der Ideale K_i, daher ist jede K_i-Gruppe in K_i sogar eine N-Untergruppe von K_{i+}. Die einzige nilpotente K_i-Gruppe in K_i ist $\{0\}$, da $\{0\}$ die einzige nilpotente N-Gruppe in N ist. Also gilt für jede K_i-Gruppe $G \neq \{0\}$ in K_i die Beziehung $\{0\} \neq G^2 \subseteq GK_i$. Daher sind die K_i einfach im Sinne von BLACKETT [3], und wir haben BLACKETTs Resultate [3; Theorem 10 und 11] aus Satz 3.11 wieder erhalten.

Wir geben nun Zerlegungssätze für N-Gruppen an.

Satz 3.12. Gilt in N die Minimalbedingung für die Rechtsideale, ist $J_\nu(N) = \{0\}$ für $\nu = 1$ oder 2 und ist $\Gamma \neq \{o\}$ eine monogene N-Gruppe, so ist Γ endliche Summe von N-Kernen Γ_i vom Typ ν.

Beweis. $\Gamma \neq \{o\}$ sei eine monogene N-Gruppe mit dem erzeugenden Element γ. Nach 3.4 b ist N_+ distributive Summe von endlich vielen Rechtsidealen K_i, die N-Gruppen vom Typ ν sind. Also ist $\Gamma = \gamma N = \gamma(\sum_i \oplus K_i) = \sum_i \gamma K_i$. Wir setzen $\Gamma_i := \gamma K_i$, falls $\gamma K_i \neq \{o\}$ ist. Γ_i ist ein N-Kern von Γ, da K_i ein Rechtsideal von N und die

Abbildung $n \to \gamma n$ ein N-Homomorphismus von N_+ auf Γ ist. Wie beim Beweis von 3.7 schließt man, daß die Einschränkung dieser Abbildung auf K_i ein N-Isomorphismus von K_i auf Γ_i ist. Also sind die N-Kerne Γ_i vom Typ ν, da die Rechtsideale K_i es sind.

Der folgende Satz gilt für eine Klasse von N-Gruppen, die nach 3.12 bei geeignetem N die monogenen N-Gruppen umfaßt.

Satz 3.13. Sei N ein Fastring und Γ eine N-Gruppe, die Summe endlich vieler minimaler N-Kerne Γ_i $(i = 1,\ldots,s)$ ist. Dann gilt:

a) Γ ist distributive Summe von einer passenden Teilmenge der Γ_i.

b) Ist $\gamma \neq o$ ein Element von Γ und sind die Γ_i vom Typ 1, so ist der Annullator $A(\gamma)$ Durchschnitt endlich vieler maximaler modularer Rechtsideale oder $A(\gamma) = N$.

Beweis. a) Sei I die Menge der ganzen Zahlen i mit $1 \leq i \leq s$. Wir wählen aus der Menge der Γ_i Systeme $\{\Gamma_j \mid j \in J \subseteq I\}$ aus mit $\Gamma_j \cap \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq j}} \Gamma_\ell = \{o\}$ für alle $j \in J$. Die Menge dieser Systeme wird durch die Inklusion teilweise geordnet. Wir wählen ein maximales System $\{\Gamma_\ell \mid \ell \in L \subseteq I\}$ mit der genannten Eigenschaft. Für ein beliebiges Γ_k $(k \in I)$ kann wegen der Minimalität der Γ_k nur gelten

$$(1)\quad \Gamma_k \cap \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell = \{o\}$$

oder $$(2)\quad \Gamma_k \cap \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell = \Gamma_k \text{, d. h. } \Gamma_k \leq \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell .$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\Gamma_k \cap \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell = \{o\}$.

Sei $\gamma \in \Gamma_j \cap \Gamma_k + \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq j}} \Gamma_\ell$ $(j \in L)$. Dann ist $\gamma = \gamma_j \in \Gamma_j$ und $\gamma_j = \gamma_k + \mu$ mit $\gamma_k \in \Gamma_k$

und $\mu \in \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq j}} \Gamma_\ell$. Also ist $\gamma_k = \gamma_j - \mu \in \Gamma_k \cap \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell = \{0\}$ und daher $\gamma_j = \mu$. Somit ist $\gamma_j \in \Gamma_j \cap \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq j}} \Gamma_\ell = \{0\}$, also ist $\Gamma_j \cap \Gamma_k + \sum_{\substack{\ell \in L \\ \ell \neq j}} \Gamma_\ell = \{0\}$ für alle $j \in L$. Dies widerspricht der Maximalität des Systems $\{\Gamma_\ell \mid \ell \in L\}$ Also ist $\Gamma_k \cap \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell = \Gamma_k$. Daraus folgt $\Gamma = \sum_{\ell \in L} \Gamma_\ell$ und damit auch $\Gamma = \sum_{\ell \in L} \oplus \Gamma_\ell$

b) Wir nehmen an, es sei $\Gamma = \sum_{i=1}^{r} \oplus \Gamma_i$ $(r \leq s)$ und $o \neq \gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$ mit $\gamma_i \in \Gamma_i$. Ist $n \in A(\gamma)$, so gilt $o = \gamma n = \gamma_1 n + \ldots + \gamma_r n$, und da $\Gamma = \Sigma \oplus \Gamma_i$ ist, muß $\gamma_i n = o$ sein für alle i mit $1 \leq i \leq r$; also ist $n \in A(\gamma_1) \cap \ldots \cap A(\gamma_r)$. Da die Γ_i stark monogen und irreduzibel sind, ist $A(\gamma_i) = N$ oder ein maximales modulares Rechtsideal.

Für Ringe erhält man 3.13 a aus [JACOBSON 9; Seite 61, Theorem 1]. 3.13 b folgt dann mit Theorem 1 von [KÉRTESZ 10]. (Der Fall $A(\gamma) = N$ für $\gamma \neq o$ tritt bei Ringen unter den Voraussetzungen von 3.13 b nicht auf).

3.14. Für den Beweis der Sätze 3.1 bis 3.9, 3.11 bis 3.13 waren Endlichkeitsbedingungen wesentlich. Ohne Endlichkeitsbedingungen kann man nur sehr viel schwächere Resultate beweisen. In den folgenden Überlegungen benützen wir den Begriff der subdirekten Summe von Fastringen, den wir analog zur Ringtheorie einführen. (Siehe [JACOBSON 9; Seite 13 - 16]). Gegeben seien Fastringe N_i $(i \in I)$, wobei I eine Indexmenge ist. Wir bilden die Produktmenge $\mathfrak{M}$ der N_i, deren Elemente die Abbildungen $n: i \to n(i)$

mit $i \in I$ und $n(i) \in N_i$ sind. Durch die Festsetzung $(m + n)(i) := m(i) + n(i)$ und $m.n(i) := m(i)n(i)$ für alle $i \in I$ wird $\mathfrak{M}$ zu einem Fastring M gemacht. M heiße vollständige direkte Summe der Fastringe N_i. Sind die N_i alle isomorph, so ist M der Fastring der Funktionen auf I mit Werten in N_i. Sei nun N ein Unterfastring von M, und die Abbildungen $\varphi_i : n \longrightarrow n(i)$ seien Homomorphismen von N auf N_i für alle $i \in I$. Dann heißt N eine subdirekte Summe der Fastringe N_i. Ist K_i der Kern von φ_i, so ist $\bigcap_{i \in I} K_i = \{0\}$. Umgekehrt gilt der

Satz 3.15. Sei $\{ K_i \mid i \in I \}$ eine Menge von Idealen eines Fastrings N mit $\bigcap_{i \in I} K_i = \{0\}$, und sei $N_i = N/K_i$. Dann ist N isomorph zu einer subdirekten Summe $\overline{N}$ der Fastringe N_i.

Beweis. Sei $\overline{M}$ das vollständige direkte Produkt der N_i. Die Abbildung $\varphi : n \longrightarrow \overline{n}$ mit $\overline{n}(i) := n + K_i$ für alle $i \in I$ ist ein Homomorphismus von N in $\overline{M}$ mit dem Kern $\bigcap_{i \in I} K_i = \{0\}$, und das Bild $\varphi(N) = \overline{N}$ ist eine subdirekte Summe der N_i.

Wählt man speziell für die K_i die ν-primitiven Ideale von N, so erhält man mit 2.12 b den

Satz 3.16. Ist N ein Fastring, und ist $J_\nu(N) = \{0\}$, so ist N isomorph einer subdirekten Summe von ν-primitiven Fastringen.

Eine subdirekte Summe der Fastringe N_i ($i \in I$) heiße dicht, wenn für jede endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_s$ aus der Indexmenge I und für jedes $a(i_1) \in N_{i_1}$ ein Element

$n \in N$ existiert mit

(3.16.1) $\quad n(i_1) = a(i_1),\ n(i_j) = 0 \quad (j = 2, \ldots, s).$

Diese Bezeichnung hat folgende Herkunft: Werden die N_i mit der diskreten Topologie versehen und das vollständige direkte Produkt M der N_i mit der Tychonoff-Topologie, so ist N genau dann dicht in M, wenn (3.16.1) gilt.

Folgendes Dichtekriterium, das JACOBSON [9] für Ringe angibt, läßt sich auf Fastringe übertragen.

Satz 3.17. (Vgl.[9; Seite 15, Proposition 1]). Sei N subdirekte Summe der Fastringe N_i $(i \in I)$. K_i seien die Kerne der Homomorphismen von N auf N_i. Genau dann ist N dicht, wenn für jede endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_s$ $(i_j \in I)$ die Beziehung

(3.17.1) $\quad K_{i_1} + \bigcap_{j=2}^{s} K_{i_j} = N$

gilt.

Beweis. Sei N dicht und a ein beliebiges Element von N. Dann existiert ein $n \in N$ mit $n(i_1) = a(i_1)$, $n(i_j) = 0$ $(j = 2, \ldots, s)$, wobei $i_1, \ldots, i_s$ eine beliebige (endliche) Folge von Indizes ist. Da $a(i_1) - n(i_1) = 0$ ist, liegt $a - n$ in K_{i_1}, und $n \in \bigcap_{j=2}^{s} K_{i_j}$, da $n(i_j) = 0$ ist für $j = 2, \ldots, s$. Also ist $N = K_{i_1} + \bigcap_{j=2}^{s} K_{i_j}$.

Nun gelte umgekehrt (3.17.1) für jede endliche Folge $i_1, \ldots, i_s$ von Indizes aus I. Da N subdirekte Summe der N_i ist, gibt es zu jedem $m_{i_1} \in N_{i_1}$ ein Element $a \in N$ mit $a(i_1) = m_{i_1}$, und weil (3.17.1) gilt, ist $a = n + b$ mit $n \in K_{i_1}$ und $b \in \bigcap_{j=2}^{s} K_{i_j}$. Dann ist $(a - n)(i_1) = m_{i_1}$

und $a - n = b$, also ist $(a - n)(i_j) = 0$ für $j = 2, \ldots, s$. Daher ist N dicht, und der Satz ist bewiesen.

§ 4. Beispiele.

Sei Λ eine additive Gruppe und $\mathfrak{M}(\Lambda)$ die Menge aller Abbildungen von Λ in sich, die das Nullelement von Λ festlassen; λm bezeichne das Bild von $\lambda \in \Lambda$ unter der Abbildung $m \in \mathfrak{M}(\Lambda)$. Durch die Festsetzungen

$\lambda(m + n) := \lambda m + \lambda n$ und $\lambda(mn) := (\lambda m)n$

für alle $\lambda \in \Lambda$ und alle $m, n \in \mathfrak{M}(\Lambda)$ wird $\mathfrak{M}(\Lambda)$ zu einem Fastring $M(\Lambda)$ gemacht. Wir betrachten im folgenden Unterfastringe von $M(\Lambda)$ für gewisse Gruppen Λ. Im ganzen Paragraphen sei Γ die additive zyklische Gruppe der Restklassen modulo 4, deren Elemente wir durch die kleinsten nichtnegativen Reste modulo 4 repräsentieren. Δ sei die Untergruppe von Γ, die aus den Elementen 0 und 2 besteht.

4.1. N_1 sei der Annullator von Δ in $M(\Gamma)$. Dann ist Γ eine stark monogene N_1-Gruppe, und Δ ist eine N_1-Untergruppe von Γ; daher ist Γ als N_1-Gruppe nicht minimal. Δ ist kein N_1-Kern von Γ, denn N_1 enthält ein Element n, das 1 annulliert und 3 festläßt, und es gilt $(2 + 3)n - 3n = 0 - 3n = 1 \notin \Delta$. Daher ist Γ als N_1-Gruppe vom Typ 1, aber nicht vom Typ 2. Der Annullator von Γ in N_1 ist das Nullideal, also ist N_1 1-primitiv. Deshalb ist $J_1(N_1)$ das Nullideal, und N_{1+} ist nach 3.4 b distributive Summe von(endlich vielen)Rechtsidealen, die N_1-Gruppen vom Typ 1 und nach 3.9 a N_1-isomorph zu Γ sind. Weil aber Γ nicht vom Typ 2 ist, gibt es keine N_1-Gruppen vom Typ 2. Dies folgt aus 3.9 a. Also ist

$J_2(N_1) = N_1$ und $J_1(N_1) \neq J_2(N_1)$. Der Fastring $N_1 = J_2(N_1)$ enthält eine Linkseins, nämlich die Abbildung, die 1 und 3 festläßt. Nach 3.9 b besitzt N_1 nur triviale Ideale. Man kann zeigen, daß die einzigen nichttrivialen Rechtsideale von N_1 die Annullatoren von 1 bzw. 3 sind. Es gibt nilpotente N_1-Gruppen in N_1, die nicht nur aus dem Nullelement von N_1 bestehen. Wir nennen als Beispiel die Gesamtheit G der Abbildungen g aus N_1 mit $\Gamma g \subseteq \Delta$.

4.2. N_2 sei der Annullator von 3 in $M(\Gamma)$. Dann ist Γ eine stark monogene N_2-Gruppe, und Δ ist keine N_2-Untergruppe von Γ. Somit ist Γ als N_2-Gruppe vom Typ 2. Der Annullator von Γ in N_2 ist das Nullideal. Also ist N_2 2-primitiv, $J_2(N_2)$ ist das Nullideal und N_{2+} ist distributive Summe von (endlich vielen) Rechtsidealen, die N_2-Gruppen vom Typ 2 sind. Die Abbildung aus N_2, die 1 und 2 festläßt, ist eine Linkseins von N_2. Die additiven Gruppen von N_1 und N_2 sind isomorph. Dabei entspricht $n_1 \in N_1$ dem Element $n_2 \in N_2$ mit $1n_1 = 1n_2$, $3n_1 = 2n_2$. Man kann zeigen, daß die Annullatoren von 1 und 2 in N_2 die einzigen nichttrivialen Rechtsideale von N_2 sind. Somit sind die Rechtsidealverbände von N_1 und N_2 isomorph; dagegen ist $J_2(N_1) = N_1$ und $J_2(N_2)$ das Nullideal von N_2.

4.3. Der Fastring N_3 bestehe aus allen Abbildungen von Γ in sich, die 0 festlassen und Δ in sich abbilden. N_1 ist ein Unterfastring von N_3. Daher ist Γ auch als N_3-Gruppe irreduzibel. Ferner ist Γ als N_3-Gruppe monogen, aber nicht stark monogen. Also ist Γ als N_3-Gruppe vom

Typ 0, aber nicht vom Typ 1. Δ ist eine N_3-Untergruppe von Γ vom Typ 2. Jede Abbildung aus N_3 ist bestimmt durch ihre Wirkung auf 1, 2 und 3. Somit ist N_{3+} die Summe der Rechtsideale $A(1) \cap A(2)$, $A(1) \cap A(3)$ und $A(2) \cap A(3)$. Der Durchschnitt von einem dieser Rechtsideale mit der Summe der beiden andern liegt stets in $A(1) \cap A(2) \cap A(3)$, und dies ist das Nullideal. Also ist N_{3+} distributive Summe der angegebenen Rechtsideale. Ordnet man dem Element $\gamma \in \Gamma$ die Abbildung aus $A(1) \cap A(2)$ zu, die 3 auf γ abbildet, so ist diese Zuordnung ein N_3-Isomorphismus von Γ auf $A(1) \cap A(2)$. Daher ist $A(1) \cap A(2)$ eine N_3-Gruppe vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1. Auf ähnliche Weise findet man, daß $A(2) \cap A(3)$ vom Typ 0 und nicht vom Typ 1 ist. N_3 enthält ein Einselement, nämlich die identische Abbildung von Γ. Daher ist $A(1) \cap A(3)$ eine N_3-Gruppe vom Typ 2, denn $A(1) \cap A(3)$ besteht nur aus zwei Elementen. Nach 3.5 ist $D(N_3)$ das Nullideal. Jede N_3-Gruppe vom Typ 2 ist nach 3.7 N_3-isomorph zu $A(1) \cap A(3)$ und damit zu Δ. Also ist $J_2(N_3) = A(\Delta) = A(2) = N_1$. Da N_3 ein Einselement enthält, ist $J_1(N_3) = J_2(N_3)$ nach 2.8 und daher $J_1(N_3) \neq D(N_3)$. Die Linkseins von N_1 ist ein idempotentes, von Null verschiedenes Element in $J_1(N_3)$. Also ist J_1 i.a. nicht nilpotent.

LAXTON bemerkte in [12; Seite 49], daß es sogar endliche distributiv erzeugte Fastringe mit Einselement gibt, in denen J_2 $(= J_1)$ nicht nilpotent ist.

4.4. Die geordneten Paare (γ, δ) mit $\gamma \in \Gamma$ und $\delta \in \Delta$ bilden eine Gruppe $\mathfrak{L}$ bezüglich der Addition, die durch

die Vorschrift $(\gamma, \delta) + (\gamma', \delta') := (\gamma+\gamma', \delta+\delta')$ erklärt ist. Θ sei die Untergruppe von $\mathfrak{Z}$, die aus allen Elementen der Form $(\gamma, 0)$ besteht, und Λ sei die Untergruppe $\{(0,0), (2,0)\}$ von $\mathfrak{Z}$. Der Unterfastring N_4 von $M(\mathfrak{Z})$ bestehe aus allen Abbildungen von $\mathfrak{Z}$ in sich, die $(0,0)$ festlassen und Λ, $\Theta - \Lambda$ und daher auch Θ in sich abbilden. N_4 enthält ein Einselement, nämlich die identische Abbildung von $\mathfrak{Z}$. Die N_4-Gruppe $\mathfrak{Z}$ ist monogen; erzeugende Elemente sind die Elemente der Form $(\gamma, 2)$. Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{Z}$ eine irreduzible N_4-Gruppe ist. $\mathfrak{Z}$ hat die N_4-Untergruppen $\mathfrak{Z}$, Θ, Λ und $\{(0,0)\}$. Ist n eine Abbildung aus N_4, die $(0,2)$ annulliert und $(2,2)$ festläßt, so ist $((2,0) + (0,2))n - (0,2)n = (2,2) \notin \Theta$. Daher sind Θ und Λ keine N_4-Kerne von $\mathfrak{Z}$. Deshalb ist $\mathfrak{Z}$ als N_4-Gruppe vom Typ 0. Der Annullator von $\mathfrak{Z}$ in N_4 ist das Nullideal, also ist $J_0(N_4)$ ebenfalls das Nullideal.

Λ und $\Theta - \Lambda$ sind N_4-Gruppen vom Typ 2; erzeugende Elemente sind $(2,0)$ bzw. die Restklasse $(3,0) + \Lambda$. Die Annullatoren $A((0,2))$, $A((1,2))$, $A((2,2))$, $A((3,2))$, $A((2,0))$ und $A((3,0) + \Lambda)$ sind maximale modulare Rechtsideale von N_4. Ihr Durchschnitt K ist somit ein Rechtsideal, das $D(N_4)$ enthält. K annulliert aber sämtliche Elemente der Form $(\gamma, 2)$ und $(2,0)$. Die Elemente $(1,0)$ und $(3,0)$ werden durch die Abbildungen aus K auf $(2,0)$ oder $(0,0)$ abgebildet. Daher ist $k_1 k_2 = 0$ $(\in N_4)$ für jedes Paar $k_1, k_2 \in K$. Also ist K nilpotent. Nach 2.19 ist $K \subseteq D(N_4)$, also $K = D(N_4)$ und damit $\underline{J_0(N_4) \neq D(N_4)}$.

§ 5. Bireguläre Fastringe.

In diesem Paragraphen erklären wir nach dem Vorbild von JACOBSON [9; Chapter IX] eine Topologie für die Menge $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ der ν-primitiven Ideale eines Fastrings N. Mit Hilfe dieser Topologie wird ein Resultat von ARENS und KAPLANSKY [1; Theorem 2.3] über "bireguläre" Ringe auf Fastringe verallgemeinert. Die Beweise sind Modifikationen der entsprechenden Beweise aus [1] und [9; Chapter IX] (Im 9. Kapitel des Buches von JACOBSON [9] werden einige Resultate von [1] zusammenfassend dargestellt.)

Für den Typ ν von N-Gruppen werden im folgenden nur die Werte 1 und 2 zugelassen.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist der

Satz 5.1. Sei N ein Fastring, $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ die Menge der ν-primitiven Ideale von N und $\mathcal{A}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$. Durch die Definition

$$(5.1.1) \qquad \mathcal{C}l\mathcal{A} := \{ P \mid P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N);\ P \supseteq \bigcap_{P' \in \mathcal{A}} P' \}$$

wird in $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ eine Abschließungsoperation und damit eine Topologie erklärt.

Für den Beweis benützen wir den

Hilfssatz 5.2. Sei N ein Fastring, A, B Ideale und P ein ν-primitives Ideal von N. Dann folgt aus $AB \subseteq P$ entweder $A \subseteq P$ oder $B \subseteq P$.

Hilfssatz 5.2 ist eine Verallgemeinerung von [9; Seite 195, Proposition 1].

Beweis von 5.2. Nach 2.12 a gibt es eine N-Gruppe Γ vom Typ ν mit $P = A(\Gamma)$. Sei ferner $AB \subseteq P$, aber $A \not\subseteq P$.

Dann ist $\Gamma A \neq \{o\}$, also $\gamma A \neq \{o\}$ für ein geeignetes $\gamma \in \Gamma$. Da Γ stark monogen ist, muß $\gamma N = \Gamma$ sein. Aber $\gamma A \neq \{o\}$ ist ein N-Kern von $\gamma N = \Gamma$ und Γ ist irreduzibel, also ist $\gamma A = \Gamma$. Wegen $\{o\} = \Gamma AB = \Gamma B$ ist $B \subseteq P$.

Beweis von 5.1. Die Beziehungen

$$\mathcal{C}\ell\, \emptyset = \emptyset$$
$$\mathcal{C}\ell\, \mathcal{C}\ell \mathcal{A} = \mathcal{C}\ell \mathcal{A}$$
$$\mathcal{C}\ell \mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}$$

folgen unmittelbar aus (5.1.1). Zu zeigen bleibt noch $\mathcal{C}\ell(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{C}\ell \mathcal{A} \cup \mathcal{C}\ell \mathcal{B}$. Wegen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ist $\mathcal{C}\ell \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}\ell(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ und ebenso $\mathcal{C}\ell \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}\ell(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, also $\mathcal{C}\ell \mathcal{A} \cup \mathcal{C}\ell \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}\ell(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.

Sei umgekehrt $P \in \mathcal{C}\ell(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, so ist $P \supseteq \bigcap_{P' \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} P'$, also $P \supseteq \bigcap_{P' \in \mathcal{A}} P' \cap \bigcap_{P'' \in \mathcal{B}} P''$ oder, wenn man $A = \bigcap_{P' \in \mathcal{A}} P'$ und $B = \bigcap_{P'' \in \mathcal{B}} P''$ einführt, $P \supseteq A \cap B \supseteq AB$.
Nun ist P aber ν-primitiv, also ist nach 5.2 $P \supseteq A$ oder $P \supseteq B$. Daraus folgt $P \in \mathcal{C}\ell \mathcal{A}$ bzw. $P \in \mathcal{C}\ell \mathcal{B}$; damit ist der Satz bewiesen.

Definition 5.3. Im folgenden bedeutet $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ den Raum der ν-primitiven Ideale von N mit der durch (5.1.1) erklärten Topologie.

5.4. Ist $P \neq Q$ für P, Q aus $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$, so ist $P \notin \mathcal{C}\ell\{Q\}$. Daher liegt P im Komplement von $\mathcal{C}\ell\{Q\}$, und dies ist eine Umgebung von P, die Q nicht enthält. Da $P \neq Q$ genau dann gilt, wenn $P \not\supseteq Q$ oder $Q \not\supseteq P$, ist T_0 erfüllt.
Wenn für alle $P, Q \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ aus $P \neq Q$ die Beziehungen $P \not\supseteq Q$ und $Q \not\supseteq P$ folgen, so ist $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ ein T_1-Raum. Dies gilt speziell für den Fall, daß die $P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ maximale

Ideale von N sind.

5.5. Sei A ein Ideal von N und $\mathcal{Q}$ die Menge der ν-primitiven Ideale von N, die A enthalten. Dann ist (N/A)/(P/A) isomorph zu N/P für alle $P \in \mathcal{Q}$, also ist P/A ein ν-primitives Ideal von N/A. Ist umgekehrt P/A ein ν-primitives Ideal von N/A, so ist das volle Urbild P in N ein ν-primitives Ideal, das in $\mathcal{Q}$ liegt. Also ist $P \to P/A$ eine eindeutig umkehrbare Abbildung von $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{P}^{(\nu)}(N/A)$. Entsprechen sich dabei die Teilmengen $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{P}^{(\nu)}(N/A)$, so bildet der Homomorphismus $N \to N/A$ den Durchschnitt $\bigcap_{P \in \mathcal{R}} P$ auf $\bigcap_{P/A \in \mathcal{R}'} P/A$ ab, und umgekehrt ist $\bigcap_{P \in \mathcal{R}} P$ das volle Urbild von $\bigcap_{P/A \in \mathcal{R}'} P/A$. Deshalb induziert der Homomorphismus $N \to N/A$ einen Homöomorphismus von $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{P}^{(\nu)}(N/A)$. Wählt man speziell $A = J_\nu(N)$, so ist $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ nach 2.12 b. Also induziert der Homomorphismus $N \to N/J_\nu(N)$ einen Homöomorphismus von $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ auf $\mathcal{P}^{(\nu)}(N/J_\nu(N))$.

Satz 5.6. Sei N ein Fastring mit Einselement, und für jedes Ideal $H \neq N$ sei $J_\nu(N/H) \neq N/H$. Dann ist $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ kompakt.

Beweis. Sei $\{ F_i \mid i \in I \}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ mit $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Wir wollen zeigen, daß eine endliche Teilmenge $\{ F_i \mid i \in I' \subset I \}$ von $\{ F_i \mid i \in I \}$ existiert mit $\bigcap_{i \in I'} F_i = \emptyset$. In diesem Sinne verwenden wir den Begriff kompakt. Sei $S_i := \bigcap_{P \in F_i} P$ und S das Ideal, das aus allen Elementen von N besteht, die in der Summe von endlich vielen Idealen S_i liegen. Dann

existiert kein ν-primitives Ideal P, das S enthält. Somit ist $J_\nu(N/S) = N/S$, also ist nach Voraussetzung $N = S$. Nun ist $1 \in N$, also $1 \in S' := \sum_{i \in I'} S_i$, wobei I' eine endliche Teilmenge der Indexmenge I ist. Aber aus $1 \in S'$ folgt $S' = N$ Daher ist $\bigcap_{i \in I'} F_i = \emptyset$, und dies war zu zeigen.

Satz 5.7. Sei N ein Fastring und $N = A_1 \oplus A_2$, wobei die A_i Ideale seien. Setzt man

$\mathcal{R}^{(\nu)}(A_i) := \{ P \mid P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N), P \not\supseteq A_i \}$, so gilt

a) $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_i)$ ist offen, abgeschlossen und homöomorph zu $\mathcal{P}^{(\nu)}(A_i)$.

b) $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_1) \cap \mathcal{R}^{(\nu)}(A_2) = \emptyset$

c) $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_1) \cup \mathcal{R}^{(\nu)}(A_2) = \mathcal{P}^{(\nu)}(N)$.

Ist $J_\nu(A_i) = \{0\}$ für $i = 1$ und 2, so gilt

d) $A_i = \bigcap_{P \in \mathcal{R}^{(\nu)}(A_i)} P \qquad (j \neq i)$

Beweis. Wegen $A_1 A_2 \subseteq A_1 \cap A_2 = \{0\}$ gilt für jedes ν-primitive Ideal P nach 5.2 entweder $A_1 \subseteq P$ oder $A_2 \subseteq P$. Würde P zugleich A_1 und A_2 enthalten, so müßte auch $N = A_1 \oplus A_2$ in P liegen. Das widerspricht der Definition der ν-primitiven Ideale. Also gilt 5.7 b und 5.7 c.

$\mathcal{R}^{(\nu)}(A_i) = \{P \mid P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N), P \supseteq A_j, j \neq i\}$, also ist $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_i)$ abgeschlossen. $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_i)$ ist offen, da $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_j)$ ebenfalls abgeschlossen ist. A_i ist zu N/A_j $(j \neq i)$ isomorph; nach 5.5 ist somit $\mathcal{R}^{(\nu)}(A_i) = \{ P \mid P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N); P \supseteq A_j \}$ homöomorph zu $\mathcal{P}^{(\nu)}(A_i)$. Daher gilt 5. 7 a.

Ist $J_\nu(A_j) = \{0\}$, so ist $J_\nu(N/A_i) = A_i/A_i$, also $A_i = \bigcap_{P \supseteq A_i} P$ und damit $A_i = \bigcap_{P \in \mathcal{R}^{(\nu)}(A_i)} P$ mit $j \neq i$.

Satz 5.7 läßt sich teilweise umkehren.

Satz 5.8. N sei ein Fastring mit $J_\nu(N) = \{0\}$; für jedes Ideal $T \neq N$ sei $J_\nu(N/T) \neq N/T$. Ferner seien $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ mit $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$ und $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \mathcal{P}^{(\nu)}(N)$. Setzt man nun $A_i := \bigcap_{P \in \mathcal{R}_i} P$, so ist N distributive Summe der Ideale A_1 und A_2.

Beweis. Es ist $A_1 \cap A_2 = \bigcap_{P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N)} P = \{0\}$, da $J_\nu(N) = \{0\}$ ist. Es genügt zu zeigen, daß $A_1 + A_2 = N$ ist. $A_1 + A_2$ ist ein Ideal von N. Falls $A_1 + A_2 \subset N$ ist, so gilt $J_\nu(N/(A_1 + A_2)) \neq N/(A_1 + A_2)$, also enthält $N/(A_1 + A_2)$ ein ν-primitives Ideal, dessen volles Urbild in N ein ν-primitives Ideal von N ist, das A_1 und A_2 enthält. Da die $\mathcal{R}_i$ abgeschlossen sind, müßte ein solches Ideal in $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ liegen. Aber $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$, also kann kein ν-primitives Ideal von N existieren, das A_1 und A_2 enthält Daher muß $A_1 + A_2 = N$ sein.

Definition 5.9. Ein Element $e \in N$ heißt zentrales Idempotent, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(5.9.1) $\quad e^2 = e$,

(5.9.2) $\quad en = ne$ für alle $n \in N$,

(5.9.3) $\quad eN$ ist ein Ideal von N.

Satz 5.10. Ist e ein Element von N, das den Bedingungen (5.9.1) und (5.9.2) genügt, so ist der Annullator $A(eN) = \{ n - en \mid n \in N \}$.

Beweis. Da eN eine N-Gruppe in N ist, muß A(eN) ein Ideal sein. Sei $Q = \{ n - en \mid n \in N \}$. Dann ist $Q \subseteq A(eN)$. Ist $n \in A(eN)$, so ist $en = 0$ wegen $e = e^2 \in eN$. Also ist $n = n - en$ und $n \in Q$.- Daraus folgt

Satz 5.11. Jedes von Null verschiedene zentrale Idempotent e vermittelt eine "Peirce-Zerlegung" von N, das heißt eine Darstellung von N als distributive Summe der Ideale eN und A(eN).

Beweis. Ist en $\neq$ 0, so auch een $\neq$ 0. Da $e = e^2 \in eN$, ist en $\notin$ A(eN) und $eN \cap A(eN) = \{0\}$. Da eN und A(eN) Ideale von N sind und da $eN + A(eN) = N$ gilt, ist $N = eN \oplus A(eN)$.

Satz 5.12. Ist N ein Fastring mit $J_\nu(N/S) \neq N/S$ für alle Ideale $S \neq N$, und ist $e \neq 0$ ein zentrales Idempotent in N, dann ist $\mathcal{R}^{(\nu)}(eN) = \{ P \mid P \in \mathcal{P}^{(\nu)}(N), P \not\supseteq eN \}$ offen, abgeschlossen und kompakt.

Beweis. Nach 5.11 ist $N = eN \oplus A(eN)$, und nach 5.7 a ist $\mathcal{R}^{(\nu)}(eN)$ offen und abgeschlossen. Da N/A(eN) isomorph zu eN ist, muß $J_\nu(eN/S) \neq eN/S$ für alle Ideale $S \neq eN$ von eN sein. e ist ein Einselement für eN, also ist $\mathcal{P}^{(\nu)}(eN)$ und daher auch $\mathcal{R}^{(\nu)}(eN)$ kompakt nach 5.6.

Bemerkung 5.13. $P \not\supseteq eN$ gilt genau dann, wenn $e \notin P$ ist.

Definition 5.14. Der Durchschnitt aller Ideale von N, die ein bestimmtes Element n enthalten, heißt das von n erzeugte Hauptideal und wird mit (n) bezeichnet.

Definition 5.15. Sei N ein Fastring. N heißt biregulär, wenn man eine Menge R von zentralen Idempotenten von N so wählen kann, daß folgendes gilt:

(5.15.1) Zu jedem $n \in N$ existiert ein $e \in R$ mit $(n) = eN$,

(5.15.2) $e + f = f + e$ für alle $e, f \in R$,

(5.15.3) Die Menge R ist abgeschlossen bezüglich der

Operationen $a.b = ab$ (gewöhnliche Multiplikation) und $a \circ b = a + b - ab$.

Bemerkung: Bei Ringen hat die Menge R aller zentralen Idempotenten die Eigenschaften (5.15.2) und (5.15.3). Ein Ring N ist genau dann biregulär (im Sinne von 5.15), wenn es zu jedem $n \in N$ ein zentrales Idempotent e gibt mit $(n) = (e)$. Dies ist die Definition der Biregularität bei ARENS-KAPLANSKY [1] . Ein biregulärer Ring ist stets halbeinfach.

Die Eigenschaft von N, biregulär zu sein, hat Konsequenzen für $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$. Dies besagt

Satz 5.16. Sei N biregulär und $J_\nu(N/S) \neq N/S$ für alle Ideale $S \neq N$. Dann ist $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ ein lokalkompakter, total-unzusammenhängender T_2-Raum.

Beweis. Sind P_1, P_2 zwei ν-primitive Ideale von N, und ist $n \in P_1$, aber $n \notin P_2$, so liegt $(n) = eN$ in P_1, aber nicht in P_2. Dabei ist $e \neq 0$ ein zentrales Idempotent. Also enthält $\mathcal{R}^{(\nu)}(eN)$ das Ideal P_2, aber nicht P_1. Nach 5.12 ist $\mathcal{R}^{(\nu)}(eN)$ offen, abgeschlossen und kompakt. Also ist $\mathcal{P}^{(\nu)}(N)$ ein lokalkompakter, total-unzusammenhängender T_2-Raum.

Satz 5.17. Sei N biregulär und $J_\nu(N) \neq N$. Ist N ein ν-primitiver Fastring, so enthält N ein Einselement, und besitzt nur triviale Ideale. Besitzt umgekehrt N nur triviale Ideale, so enthält N ein Einselement und ist ν-primitiv.

Beweis. Wir modifizieren den Beweis von [1; Theorem 2.1].

Ist N ein ν-primitiver Fastring, so ist $\{0\}$ ein ν-primitives Ideal. Ist e ein zentrales Idempotent, so sind eN und A(eN) Ideale mit $(eN)(A(eN)) = \{0\}$. Also ist nach 5.2 entweder $eN = \{0\}$ und damit $e^2 = e = 0$, oder es ist $A(eN) = \{0\}$, und dann ist nach 5.10 $n - en = 0$ für alle $n \in N$, also $n = en = ne$ für alle $n \in N$. Daher ist e ein Einselement von N und N = eN. Da N biregulär ist, enthält jedes Ideal $S \neq \{0\}$ von N ein zentrales Idempotent $e \neq 0$. Da $e = 1$ sein muß, ist $S = N$.

Sei umgekehrt N ein biregulärer Fastring, der nur triviale Ideale enthält; dann ist $(n) = N$ für jedes $n \neq 0$, und es gibt ein zentrales Idempotent e mit N = eN, also enthält N das Einselement e. Da $J_\nu(N) \neq N$ ist, muß es N-Gruppen vom Typ ν geben, deren Annullator das Nullideal von N ist, weil N nur triviale Ideale enthält.

Folgesatz 5.18. Ist N ein biregulärer Fastring, und ist $J_2(N/S) \neq N/S$ für jedes Ideal $S \neq N$, so fallen die 1-primitiven Ideale mit den 2-primitiven und den maximalen zusammen.

Denn ist S ein 1-primitives Ideal von N, so enthält N/S wegen $J_1(N/S) \subseteq J_2(N/S) \subset N/S$ nach 5.17 nur triviale Ideale, und N/S besitzt ein Einselement. Daher ist N/S nach 5.17 ein 2-primitiver Fastring, und S ist ein 2-primitives Ideal von N. Ist S ein maximales Ideal, so enthält N/S nur triviale Ideale, also ist S ein 2-primitives Ideal von N nach 5.17.

Da wir im folgenden bireguläre Fastringe betrachten mit

der Eigenschaft $J_2(N/S) \neq N/S$ für jedes Ideal $S \neq N$, ist eine Unterscheidung von 1-primitiven und 2-primitiven Idealen nicht mehr nötig. Wir werden deshalb von primitiven Idealen sprechen und $\mathcal{P}(N)$ statt $\mathcal{P}^{(\omega)}(N)$ schreiben.

Satz 5.19. Sei N ein biregulärer Fastring mit $J_2(N/S) \neq N/S$ für alle Ideale $S \neq N$. Sei $\mathcal{E}$ eine kompakte, offene Teilmenge von $\mathcal{P}(N)$. Dann enthält N ein Element e mit den Eigenschaften

(5.19.1) $e + P$ ist Einselement von N/P für alle $P \in \mathcal{E}$,

(5.19.2) $e \in P$ für alle $P \in \mathcal{P}(N) - \mathcal{E}$.

Wir werden Elemente mit der Eigenschaft (5.19.1) auch ein "Einselement modulo $\mathcal{E}$" nennen.

Beweis von 5.19. Sei $\mathcal{E}$ eine kompakte, offene Teilmenge von $\mathcal{P}(N)$. Da $\mathcal{P}(N)$ ein T_2-Raum ist, muß $\mathcal{E}$ abgeschlossen sein. Sei $P \in \mathcal{E}$ und $n_i \in N$ mit $n_i \notin P$ und $(n_i) = f_iN$, wobei $f_i \neq 0$ ein zentrales Idempotent ist. Dann ist $P \in \mathcal{R}(f_iN)$ (vgl. 5.7) und $\mathcal{R}(f_iN)$ ist offen und abgeschlossen nach 5.7.a. Da $\mathcal{E}$ kompakt ist, überdecken endlich viele $\mathcal{R}(f_iN)$ ganz $\mathcal{E}$, ebenso endlich viele $\mathcal{R}(f_iN) \cap \mathcal{E} =: \mathcal{A}_i$. Sei $i = 1, \ldots, s$. Die $\mathcal{A}_i$ sind offen und abgeschlossen. f_i ist ein Einselement modulo $\mathcal{R}(f_iN)$, denn nach 5.7 enthält jedes $P \in \mathcal{R}(f_iN)$ den Annullator $A(f_iN) = \{ n - f_in \mid n \in N \}$. Also ist $f_in = n \equiv nf_i$ modulo P für alle $P \in \mathcal{P}(f_iN)$. Daher ist f_i auch ein Einselement modulo $\mathcal{A}_i$. Existiert zu $\mathcal{A}_i$ ein Einselement e_i modulo $\mathcal{A}_i$ mit $e_i \in P$ für $P \notin \mathcal{A}_i$, so ist $e_1 \circ e_2 = e_1 + e_2 - e_1e_2$ ein Element, das die

genannten Eigenschaften für $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ statt $\mathcal{A}_i$ hat. Denn

$(e_1 \circ e_2) + P = (e_1 + P) + (e_2 + P) - (e_1 + P)(e_2 + P)$,

also ist

$(e_1 \circ e_2) + P = e_1 + P$ für $P \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, $P \notin \mathcal{A}_2$,

$(e_1 \circ e_2) + P = e_2 + P$ für $P \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, $P \notin \mathcal{A}_1$,

$(e_1 \circ e_2) + P = e_1 + P = e_2 + P$ für $P \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$;

daher ist $e_1 \circ e_2$ Einselement modulo $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

$(e_1 \circ e_2) + P = P$ oder $(e_1 \circ e_2) \in P$ für $P \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Ist $h_\nu = (\ldots(e_1 \circ e_2) \circ e_3)\ldots) \circ e$ Einselement modulo $\mathcal{A}_1 \cup \ldots \mathcal{A}_\nu$ $(\nu \leq s-1)$ und liegt h_ν in $\mathcal{P}(N) - (\mathcal{A}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_\nu)$, so hat $h_{\nu+1}$ die entsprechenden Eigenschaften für $\bigcup_{j=1}^{\nu+1} \mathcal{A}_j$. Daher ist h_s Einselement mod $\mathcal{E}$ und $h_s \in P$ für $P \in \mathcal{P}(N) - \mathcal{E}$. Es genügt also, den Satz zu beweisen für eine offene und abgeschlossene Menge $\mathcal{A}$, zu der es ein Einselement g modulo $\mathcal{A}$ gibt. $\mathcal{C} := \mathcal{P}(N) - \mathcal{A}$ ist offen und abgeschlossen. Wir bilden $A := \bigcap_{P \in \mathcal{A}} P$ und $S := \bigcap_{P \in \mathcal{C}} P$. Da $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{C}$) abgeschlossen ist, folgt $P \in \mathcal{A}$ (bzw. $P \in \mathcal{C}$) aus $P \supseteq A$ (bzw. $P \supseteq S$). Wir zeigen zunächst $A + S = N$. Da N/A ein Einselement enthält (g ist Eins modulo P für $P \in \mathcal{A}$, also auch modulo $A = \bigcap_{P \in \mathcal{A}} P$), muß jedes nichttriviale Ideal von N/A in einem maximalen und wegen 5.18 in einem primitiven Ideal liegen. Dies beweist man wie 2.1; man hat nur die Rechtsideale im Beweis von 2.1 durch Ideale zu ersetzen. Nun sei $A + S \neq N$, also $(A + S)/A$ ein nichttriviales Ideal von N/A. Da $(A + S)/A$ in einem primitiven Ideal von N/A liegt, muß das (volle) Urbild $A + S$ in einem $P \in \mathcal{P}(N)$ liegen.

Aus $A + S \subseteq P$ folgt $P \in \mathcal{A} \cap \mathcal{C}$, aber $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Also muß $A + S = N$ und $g = a + s$ $(a \in A, s \in S)$ sein. $g \equiv s$ modulo A ergibt $ng \equiv ns \mod A$, da A ein Ideal ist, also ist $0 \equiv ng - n \equiv ns - n \mod A$. Ebenso gilt $0 \equiv gn - n \equiv sn - n \mod A$. Deshalb ist s ein Einselement modulo A und daher ein Einselement modulo $\mathcal{A}$. Aber $s \in S$, also $s + P = P$ für $P \in \mathcal{C}$.

5.20. Sei N ein biregulärer Fastring mit $J_2(N/S) \neq N/S$ für jedes Ideal $S \neq N$ und $J_2(N) = \{0\}$. Sei $\mathcal{P}(N)$ der Raum seiner primitiven Ideale. Dann ist N nach 3.16 isomorph einer subdirekten Summe der Fastringe $N_P = N/P$ $(P \in \mathcal{P}(N)$; wir wählen $\mathcal{P}(N)$ als Indexmenge). Wir betrachten nun die spezielle Situation, daß alle N_P isomorph zu einem festen Fastring K sind, der ein Einselement enthält. $\mathcal{F} = \{\varphi_P \mid P \in \mathcal{P}(N)\}$ sei ein System von Isomorphismen von K auf N_P. Die Menge $K^{\mathcal{P}(N)}$ aller Abbildungen von $\mathcal{P}(N)$ in K ist unter den punktweise vorgenommenen Operationen ein Fastring. Man kann nun zu N einen Teilfastring von $K^{\mathcal{P}(N)}$ finden, indem man dem Element $n \in N$ die Abbildung n' mit $n'(P) := (n + P)\varphi_P^{-1}$ zuordnet. Die Abbildung $n \to n'$ ist ein Isomorphismus von N in $K^{\mathcal{P}(N)}$, da $\bigcap_{P \in \mathcal{P}(N)} P = \{0\}$ ist. Das Bild N' von N unter der Abbildung $n \to n'$ wollen wir den N durch $\mathcal{F}$ zugeordneten Fastring nennen.

$K^{\mathcal{P}(N)}$ läßt K als Linksoperatorenbereich zu, wenn man $(km')(P) := k(m'(P))$ für $k \in K$ und $m \in K^{\mathcal{P}(N)}$ setzt. Wir machen nun die wesentliche Voraussetzung, daß $KN' \subseteq N'$ ist. Dann kann man K auch zu einem Linksoperatorenbereich von

N machen. Dazu erklären wir eine Abbildung $\varphi : (k,n) \to kn$ von $K \times N$ in N durch die Festsetzung $(kn)' := kn$. Da die Abbildung $n \to n'$ ein Isomorphismus von N auf N' ist, ist φ wohldefiniert. Es gelten die Beziehungen

(5.20.1) $k(n_1 + n_2) = kn_1 + kn_2$,

(5.20.2) $k(n_1 n_2) = (kn_1)n_2$ für $n_1, n_2 \in N$ und $k \in K$.

Ist 1 das Einselement von K, so gilt

(5.20.3) $1\, n = n$ für alle $n \in N$.

Ist $n \in P$, so ist $n'(P) = 0$, also auch $kn'(P) = 0$ und $kn \in P$. Somit sind in N alle primitiven Ideale K-zulässig. Daher kann man durch die Vorschrift

(5.20.4) $k(n + P) := kn + P$

eine Abbildung $\overline{\varphi}$ von $K \times N_P$ in N_P erklären. Sei $1_P + P$ das Einselement von N_P, also $1\,\varphi_P = 1_P + P$ für $1 \in K$. Dann ist $k(1_P + P) = k1_P + P = ((k1_P)'(P))\,\varphi_P = (k1'_P(P))\varphi_P$

$= (k1)\varphi_P = k\,\varphi_P$.

Da φ_P ein Isomorphismus auf N_P ist, hat jedes Element aus N_P die Form $k(1_P + P)$.

Bemerkung. Hat K nichttriviale Automorphismen, so kann man die Isomorphismen φ_P durch Isomorphismen ψ_P ersetzen, die sich von den φ_P um Automorphismen von K unterscheiden. Daher ist N' durch N allein (ohne Angabe der φ_P) nicht eindeutig bestimmt. Nur bei geeigneter Wahl der φ_P wird man erwarten können, daß N' aus stetigen Abbildungen von $\mathcal{P}(N)$ in K besteht, wie Satz 5.21 aussagt.

ARENS und KAPLANSKY [1] gehen von der Annahme aus, daß der bireguläre Ring N eine K-Linksalgebra ist. Dann ist

auch N_P eine K-Linksalgebra, und die Abbildung $k \to k(1_P + P)$ ist ein Homomorphismus. Die genannten Autoren setzen voraus, daß diese Abbildung ein Isomorphismus auf N/P ist, und wählen sie als φ_P. Dagegen nehmen wir die φ_P als gegeben an und setzen zusätzlich voraus, daß $KN' \subseteq N'$ ist. Dann stellt sich, wie gezeigt, der Isomorphismus φ_P in der Form $k\varphi_P = k(1_P + P)$ dar.

Satz 5.21. Sei N ein biregulärer Fastring, $J_2(N/S) \neq N/S$ für alle Ideale $S \neq N$ und $J_2(N) = \{0\}$. Sei $N/P =: N_P$ für $P \in \mathcal{P}(N)$ und $\mathcal{F}$ ein System von Isomorphismen φ_P von einem Fastring K mit Einselement auf N_P. Nach 5.20 werde N durch $\mathcal{F}$ der Fastring $N' \subseteq K^{\mathcal{P}(N)}$ zugeordnet, und es gelte $K\,N' \subseteq N'$. Der Fastring K habe die diskrete Topologie. Dann besteht N' aus allen stetigen Abbildungen von $\mathcal{P}(N)$ in K mit kompaktem Träger.[1)]

Folgesatz 5.22. Unter den Voraussetzungen von Satz 5.21 ist N isomorph zu dem Fastring aller stetigen Abbildungen mit kompaktem Träger von einem lokal-kompakten, total unzusammenhängenden T_2-Raum $\mathcal{P}(N)$ in einen Fastring K mit Einselement, der nur triviale Ideale enthält und für den $J_2(K) = \{0\}$ gilt.

Denn nach 5.16 ist $\mathcal{P}(N)$ ein lokal-kompakter und total

---

1) Da K die diskrete Topologie besitzt, ist die Menge $T(n') := \{P \mid P \in \mathcal{P}(N),\ n'(P) \neq 0\}$ für $n' \in N'$ abgeschlossen. Daher ist es gleichgültig, ob man T(n') oder die abgeschlossene Hülle von T(n') als Träger bezeichnet.

unzusammenhängender T_2-Raum; K ist ein primitiver biregulärer Fastring, also ist $J_2(K) = \{0\}$, und nach 5.17 enthält K ein Einselement und besitzt nur triviale Ideale.

Beweis von 5.21. $n \in N$ sei nicht das Nullelement von N. Genau dann ist $n'(P) \neq 0$, wenn $n \notin P$ ist. Nun sei $(n) = eN$, wobei $e \neq 0$ ein zentrales Idempotent ist. $n \notin P$ gilt genau dann, wenn $eN \notin P$ ist. Also ist $P \in \mathcal{R}(eN)$ gleichwertig mit $n'(P) \neq 0$, und $\mathcal{R}(eN)$ ist offen, abgeschlossen und kompakt nach 5.12. n' hat also einen kompakten Träger, und $n'^{-1}(0) = \{ P \mid n'(P) = 0 \}$ ist offen. Nach 5.19 existiert ein $f \in N$ mit $f'(P) = 1$ für $P \in \mathcal{R}(eN)$ und $f'(P) = 0$ für $P \notin \mathcal{R}(eN)$. Sei $k \in K$, $k \neq 0$ und $n'(P) = k$ für gewisse $P \in \mathcal{P}(N)$. Die Beziehung $n'(P) = k\, f'(P)$ oder $n'(P) - kf'(P) = (n - kf)'(P) = 0$ gilt genau dann, wenn $n - kf \in P$ ist. Sei $((n - kf)) = gN$ mit einem zentralen Idempotent g. Wie oben schließt man, daß $(n - kf)'(P) = 0$ genau dann gilt, wenn $P \notin \mathcal{R}(gN)$ ist. $\mathcal{R}(gN)$ ist abgeschlossen und offen. Dies gilt auch im Fall $g = 0$, der in 5.12 ausgeschlossen war. Also ist das Komplement $\mathcal{A}$ von $\mathcal{R}(gN)$ in $\mathcal{P}(N)$ offen und abgeschlossen.
$\mathcal{A} = \{ P \mid P \in \mathcal{P}(N), (n - kf)'(P) = 0 \}$. Daher ist $n'^{-1}(k) = \mathcal{A} \cap \mathcal{R}(eN)$ offen, und n' ist stetig.

Ist m' eine stetige Abbildung von $\mathcal{P}(N)$ in K mit kompaktem Träger, so ist die Menge
$m'(\mathcal{P}(N)) := \{ m'(P) \mid P \in \mathcal{P}(N) \}$ endlich, und die Mengen $\mathcal{A}(k) := \{ P \mid m'(P) = k \}$ sind offen und abgeschlossen. Ist $k \neq 0$ und $\mathcal{A}(k) \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{A}(k)$ kompakt und offen, und

es existiert nach 5.19 ein $e_k \in N$ mit $e_k'(P) = 1$ für $P \in \mathcal{A}(k)$ und $e_k'(P) = 0$ für $P \notin \mathcal{A}(k)$. Endlich viele $\mathcal{A}(k)$ überdecken den kompakten Träger von m', und $m' = \sum ke_k'$, wobei über alle $k \in m'(\mathcal{P}(N))$, $k \neq 0$ in beliebiger Reihenfolge zu summieren ist. Also liegt m' in N'.

Satz 5.21 bzw. Folgesatz 5.22 kann man teilweise umkehren. Es gilt nämlich der

Satz 5.23. Sei $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ein lokal-kompakter, total unzusammenhängender T_2-Raum. K sei ein diskreter Fastring mit Einselement und $J_2(K) = \{0\}$, der nur triviale Ideale besitzt. N sei der Fastring aller stetigen Abbildungen mit kompaktem Träger von $\mathcal{P}$ in K, wobei die Verknüpfungen in N punktweise erklärt sind. Schließlich sei $M(P) := \{n \mid n \in N,\ n(P) = 0\}$. Dann ist N biregulär, $J_2(N)$ ist das Nullideal und $J_2(N) \neq N$. Die Menge $\{M(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$ ist identisch mit der Menge der maximalen (echten) Ideale von N, und für $Q, R \in \mathcal{P}$, $Q \neq R$ gilt $M(Q) \neq M(R)$. Zu jedem $P \in \mathcal{P}$ existiert ein Isomorphismus φ_P von K auf $N/M(P)$. N läßt K als Linksoperatorenbereich zu, wenn man $(kn)(P) := k(n(P))$ für alle $k \in K$, $n \in N$, $P \in \mathcal{P}$ setzt. Es gelten die Beziehungen (5.20.1) - (5.20.3), und jedes maximale Ideal von N ist K-zulässig.

Beweis. 1)[1] Da $\mathcal{P}$ ein lokal-kompakter, total unzusammenhängender T_2-Raum ist, bilden die (zugleich) offenen

---

1) Auf die im Abschnitt 1) des Beweises angeführten Tatsachen machte Herr K. H. HOFMANN den Verfasser aufmerksam.

und abgeschlossenen Umgebungen eines Punktes $P \in \mathcal{P}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von P. (Siehe z.B. N. BOURBAKI [3 a; Seite 164]). Somit besitzt jeder Punkt $Q \in \mathcal{P}$ ($\mathcal{P} \neq \emptyset$) eine kompakte, offene Umgebung, und es gibt eine Abbildung $e \in N$ mit $e(Q) = 1$ ($\in K$). Daher ist $N \neq M(Q) \supseteq \{0\}$. Ist $R \in \mathcal{P}$ und $R \neq Q$, so gibt es eine kompakte, offene Umgebung $\mathcal{A}$ von Q, die R nicht enthält. Also gibt es eine Abbildung $e_{\mathcal{A}} \in N$ mit $e_{\mathcal{A}}(P) = 1$ für alle $P \in \mathcal{A}$ und $e_{\mathcal{A}}(P) = 0$ sonst; insbesondere gilt $e_{\mathcal{A}}(Q) = 1 \neq 0 = e_{\mathcal{A}}(R)$, also $e_{\mathcal{A}} \in M(R)$, $e_{\mathcal{A}} \notin M(Q)$ und $M(Q) \neq M(R)$.

2) Wie schon im Abschnitt 1 erwähnt wurde, gibt es zu jedem kompakten, offenen Teilraum $\mathcal{A}$ von $\mathcal{P}$ in N ein Element $e_{\mathcal{A}}$ mit $e_{\mathcal{A}}(P) = 1$ für $P \in \mathcal{A}$ und $e_{\mathcal{A}}(P) = 0$ für $P \notin \mathcal{A}$. Sei R die Menge der $e_{\mathcal{A}}$. Alle Elemente von R haben die Eigenschaften (5.9.1) und (5.9.2). Es gelten die Beziehungen

$$e_{\mathcal{A}} + e_{\mathcal{B}} = e_{\mathcal{B}} + e_{\mathcal{A}},$$
$$e_{\mathcal{A}}\, e_{\mathcal{B}} = e_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \in R,$$
$$e_{\mathcal{A}} \circ e_{\mathcal{B}} = e_{\mathcal{A}} + e_{\mathcal{B}} - e_{\mathcal{A}}\, e_{\mathcal{B}} = e_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \in R$$

für alle $e_{\mathcal{A}}$, $e_{\mathcal{B}} \in R$, wobei $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ kompakte, offene Teilräume von $\mathcal{P}$ seien. ($\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ ist kompakt, da $\mathcal{P}$ ein T_2-Raum ist.) Also hat R die Eigenschaften (5.15.2) und (5.15.3). Sei nun $n \in N$ und $\mathcal{A}$ sein kompakter Träger. $\mathcal{A}$ ist offen, da K diskret ist. Wir zeigen, daß $(n) = e_{\mathcal{A}} N$ ist. Daraus folgt dann die Biregularität von N. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß n nicht das Nullelement von N ist. Für alle $m \in N$, deren Träger in $\mathcal{A}$ liegen, gilt $e_{\mathcal{A}} m = m$, also $m \in e_{\mathcal{A}} N$. Andererseits liegt der Träger jeder

Abbildung $e_{\mathcal{A}}m$ in $\mathcal{A}$, also besteht $e_{\mathcal{A}}N$ genau aus den Abbildungen aus N, deren Träger in $\mathcal{A}$ liegen. Daraus folgt durch eine kurze Rechnung, daß $e_{\mathcal{A}}N$ ein Ideal ist. $(n) \subseteq e_{\mathcal{A}}N$.

Nun sei I ein Ideal von N, das n enthält, und $k \neq 0$ sei ein Element aus der Menge $n(\mathcal{P}) := \{n(P) \mid P \in \mathcal{P}\} \subseteq K$. $n(\mathcal{P})$ ist endlich, da K diskret und der Träger von n kompakt ist. Die Mengen $\mathcal{A}(k) := \{ P \mid P \in \mathcal{P}, n(P) = k \}$ mit $k \in n(\mathcal{P})$ und $k \neq 0$ bilden eine endliche Überdeckung des Trägers $\mathcal{A}$ von n mit paarweise disjunkten, offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen. Zu jedem $\mathcal{A}(k)$ gibt es in R ein $e_{\mathcal{A}(k)}$ mit $e_{\mathcal{A}(k)}(P) = 1$ für $P \in \mathcal{A}(k)$ und $e_{\mathcal{A}(k)}(P) = 0$ für $P \notin \mathcal{A}(k)$. Wir bilden $e_{\mathcal{A}(k)}{}^n = n_k \in I$. Alle Elemente von N, die auf $\mathcal{A}(k)$ konstant sind und alle $P \notin \mathcal{A}(k)$ auf 0 abbilden, bilden einen Teilfastring N_k von N, der zu K isomorph ist. $N_k \cap I$ ist ein Ideal von N_k, da I ein Ideal von N ist. $n_k \in N_k \cap I$, und n_k ist nicht das Nullelement von N_k. Daher ist $N_k \cap I = N_k$ und $N_k \subseteq I$, denn N_k enthält nur triviale Ideale. Also ist $e_{\mathcal{A}(k)} \in I$, und daher liegt auch $e_{\mathcal{A}} = \sum e_{\mathcal{A}(k)}$ $(k \in n(\mathcal{P}), k \neq 0)$ in I. Daraus folgt $e_{\mathcal{A}} \in (n)$, $e_{\mathcal{A}}N \subseteq (n)$ und damit $(n) = e_{\mathcal{A}}N$ mit $e_{\mathcal{A}} \in R$.

3) Setzt man $(km)(P) := k(m(P))$ für alle $k \in K$, $m \in N$, $P \in \mathcal{P}$, so sind die Beziehungen (5.20.1) - (5.20.3) erfüllt, und $M(P) = \{ n \mid n \in N, n(P) = 0 \}$ ist K-zulässig; daher kann man $k(n + M(P)) := kn + M(P)$ setzen. Die Abbildungen $n \in N$ mit $n(P) = 1$ $(\in K)$ bilden eine Restklasse modulo M(P), die wir mit $1_P + M(P)$ bezeichnen. Dann ist die Abbildung $\varphi_P : k \to k(1_P + M(P))$ ein Isomorphismus von K auf $N/M(P)$

für alle $P \in \mathcal{P}$. Da K nur triviale Ideale enthält, ist M(P) maximal. K ist als homomorphes Bild von N biregulär, und $J_2(K) = \{0\}$ $(\neq K)$ nach Voraussetzung. Daher ist K nach 5.17 2-primitiv, und für alle $P \in \mathcal{P}$ ist M(P) ein 2-primitives Ideal von N. Da $\bigcap_{P \in \mathcal{P}} M(P) = \{0\}$, ist $J_2(N) = \{0\}$.

4) Nun zeigen wir: Enthält ein Ideal I von N zu jedem $P \in \mathcal{P}$ eine Abbildung n_P mit $n_P(P) \neq 0$, so ist I = N. Daraus folgt, daß es zu jedem maximalen (echten) Ideal L von N ein $P \in \mathcal{P}$ gibt mit L = M(P).

Ist $n \in N$ ein beliebiges Element von N und $\mathcal{A}$ sein kompakter Träger, so bilden die Träger $\mathcal{A}_P$ der n_P mit $P \in \mathcal{A}$ eine Überdeckung von $\mathcal{A}$ mit (kompakten) offenen Mengen. Da $\mathcal{A}$ kompakt ist, kann man endlich viele P_i $(i = 1,\ldots,s)$ so auswählen, daß die $\mathcal{A}_{P_i}$ eine Überdeckung von $\mathcal{A}$ bilden. Da $n_{P_i} \in I$ ist, enthält I nach Teil 2 auch das Element e_i mit $e_i(P) = 1$ für $P \in \mathcal{A}_{P_i}$ und $e_i(P) = 0$ für $P \notin \mathcal{A}_{P_i}$. Daher enthält I das Element $e = (\ldots(e_1 \circ e_2) \circ e_3)\ldots) \circ e_s$ mit den Eigenschaften $e(P) = 1$ für $P \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{A}_{P_i}$ und $e(P) = 0$ für $P \notin \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{A}_{P_i}$. Also ist $n = en \in I$ und I = N.

Literatur

[1] ARENS, R.F., und KAPLANSKY, I.: Topological representations of algebras. Trans. Am. Math. Soc. 63, 457 - 481 (1948).

[2] BETSCH, G.: Ein Radikal für Fastringe. Math. Z. 78, 86 - 90 (1962).

[3] BLACKETT, D.W.: Simple and semisimple near-rings. Proc. Am. Math. Soc. 4, 772 - 785 (1953).

[3 a] BOURBAKI, N.: Éléments de Mathématique. Livre III, Topologie générale, Chapitre II. 2. Auflage Paris 1951.

[4] DESKINS, W.E.: A radical for near-rings. Proc. Am. Math. Soc. 5, 825 - 827 (1954).

[5] DESKINS, W.E.: A note on the system generated by a set of endomorphisms of a group. Michigan Math. J. 6, 45 - 49 (1959).

[6] FRÖHLICH, A.: Distributively generated near-rings I. Ideal theory. Proc. London Math. Soc. (3) 8, 76 - 94 (1958).

[7] FRÖHLICH, A.: Distributively generated near-rings II. Representation theory. Proc. London Math. Soc. (3) 8, 95 - 108 (1958).

[8] FRÖHLICH, A.: The near-ring generated by the inner automorphisms of a finite simple group. J. London Math. Soc. 33, 95 - 107 (1958).

[9] JACOBSON, N.: Structure of rings. Am. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 37. Providence R. I. 1956.

[10] KERTÉSZ, A.: Modules and semi-simple rings II. Publ. Math. Debrecen 4, 229 - 236 (1955/56).

[11] LAXTON, R.R.: Primitive distributively generated near-rings. Mathematika 8, 142 - 158 (1961).

[12] LAXTON, R.R.: A radical and its theory for distributively generated near-rings. J. London Math. Soc. 38, 40 – 49 (1963).

[13] WIELANDT, H.: Unveröffentlichte Manuskripte aus den Jahren 1937 - 1952.

Lebenslauf

Am 17. November 1934 wurde ich, Karl Christian Gerhard Betsch, als Sohn des Studienrats Dr. Christian Betsch und seiner Frau Marie Luise, geb. Stein in Stuttgart geboren. Ich besuchte die Hellenstein-Oberschule für Jungen in Heidenheim/Brenz vom Dezember 1945 bis zum Sommer 1948 und das Eberhard-Ludwigs-Gymnasium in Stuttgart vom Herbst 1948 bis zur Reifeprüfung, die ich am 23. Februar 1954 bestand. Dann studierte ich Mathematik und Physik. Ich war vom Sommersemester 1954 bis zum Sommersemester 1956 an der Technischen Hochschule Stuttgart immatrikuliert; im Wintersemester 1956/57 und Sommersemester 1957 studierte ich an der Universität Göttingen und vom Wintersemester 1957/58 bis zum Wintersemester 1959/60 an der Universität Tübingen. Am 17. Mai 1960 bestand ich die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik (Haupt- und Doppelfach) und Physik (Beifach). Seitdem bin ich Verwalter einer Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Tübingen.

Meine akademischen Lehrer waren u. a.
in Mathematik die Herren Baier, Gaier, Lösch, Meyer-König, Pfeiffer, Schulz und Vogel (Stuttgart); Deuring, Lyra, Reidemeister, Tollmien und Siegel (Göttingen); Huppert, Kamke, H.Kneser, M.Müller, Pickert und Wielandt (Tübingen); in Physik die Herren Dehlinger, Grammel, H.O.Kneser und Kulp (Stuttgart); Flammersfeld und Schäfer (Göttingen); Braunbek, Elwert und Möllenstedt (Tübingen);

in Philosophie, Psychologie und Pädagogik die Herren Frey (Stuttgart); Klein, Patzig und Wilde (Göttingen); von Freytag gen. Löringhoff, Klöden und Schulz (Tübingen).

Gesamtherstellung: Paul Jllg, Photo-Offsetdruck, Stuttgart, Olgastraße 66